UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB 2022
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ: Problemele pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat în sistemul electronic. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parţială din regulamentul concursului.

1. Fie $x = \sin \dfrac{12133}{6}\pi$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $x > 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x < 0$.

2. Dacă într-un sistem cartezian de coordonate vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci mijlocul F al segmentului AG are coordonatele

$\boxed{\text{A}}$ $F(0,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; $\boxed{\text{C}}$ $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; $\boxed{\text{D}}$ altă valoare.

3. Numărul soluţiilor ecuaţiei $3\sin x - 2 = 0$ pe intervalul $[0, \pi]$ este

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ infinit.

4. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Ecuaţia nu are soluţii. $\boxed{\text{B}}$ Ecuaţia are exact două soluţii.
$\boxed{\text{C}}$ Ecuaţia are exact patru soluţii. $\boxed{\text{D}}$ Ecuaţia are numai soluţii pozitive.

5. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}\right)^{300}$ este

$\boxed{\text{A}}$ 50; $\boxed{\text{B}}$ 51; $\boxed{\text{C}}$ 52; $\boxed{\text{D}}$ 150.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Suma elementelor în matricea A^5 este:

$\boxed{\text{A}}$ 19; $\boxed{\text{B}}$ 20; $\boxed{\text{C}}$ 21; $\boxed{\text{D}}$ 22.

7. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive, cu proprietatea că $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, oricare ar fi $n \geq 1$. Atunci limita şirului este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ nu există; $\boxed{\text{D}}$ 0.

8. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x < 0 \\ x^3 + x + \alpha & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$$

este continuă dacă:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{D}}$ nu există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia să fie continuă.

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ în punctul de abscisă $x = 9$ este:

A $-12y + x - 15 = 0$; B $12y - x - 15 = 0$; C $y - 12x - 15 = 0$; D $y + 12x + 15 = 0$.

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$$

este

A $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; B $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; C $\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; D $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11. Vârfurile A şi B ale paralelogramului $ABCD$ se găsesc pe dreapta de ecuaţie $3x - y - 4 = 0$, iar punctul de intersecţie O al diagonalelor AC şi BD are coordonatele $(3, 4)$. Dacă coordonatele vârfului A sunt $(0, -4)$, atunci ecuaţia dreptei CD este:

A $x + 3y - 42 = 0$; B $x - 3y - 6 = 0$; C $3x - y - 6 = 0$; D $y = 3x + 6$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - [2x]$, unde prin $[a]$ se notează partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A f are perioada $\frac{1}{2}$; B f este injectivă; C f este surjectivă; D f este pară.

13. Fie suma $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde i este unitatea imaginară ($i^2 = -1$). Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A S_{2020} este un număr real.
B $|S_{2020}|$ este un număr iraţional.
C Partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011.
D $|S_{2022}| = 1011$.

14. Fie $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Valoarea expresiei $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ este egală cu:

A 0; B 12; C 1; D 10.

15. Suma soluţiilor ecuaţiei $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ este

A -1; B 0; C 1; D 2.

16. Punctul $A(3, 1)$ este vârful unui pătrat în care o diagonală se află pe dreapta de ecuaţie $y - x = 0$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Distanţa de la vârful A la această diagonală este egală cu 2.
B Ecuaţia dreptei pe care se află cealaltă diagonală este $x + y + 2 = 0$.
C Aria pătratului este 4.
D Punctul $C(1, 3)$ este de asemenea vârf al pătratului.

17. Fie triunghiul ABC, în care notăm $BC = a, AC = b, AB = c$. Presupunem că lungimea medianei AM este egală cu c. Atunci:

A $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; B $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; C $\cos C = \frac{4a}{3b}$; D $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

18. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right)$ este:

A $-\dfrac{1}{3}$; B -1; C 0; D $\dfrac{1}{2}$.

19. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

B $f(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

C Funcţia f este impară.

D $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

20. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\mathrm{e}^x = -\frac{1}{3}$ este:

A 0; B 1; C 2; D 3.

21. Fie ABC un triunghi şi $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$ astfel încât $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha$. Dacă $\mathcal{A}_{ABC}$ este aria triunghiului ABC şi $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ este aria triunghiului $A'B'C'$, atunci

A $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha)$; B $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$;

C $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 12\alpha^2(1-\alpha)^2$; D $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

22. Valoarea limitei $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\operatorname{tg} x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$ este:

A 1; B π; C 0; D -1.

23. Triunghiul ABC în care are loc relaţia $\sin(B) + \cos(B) = \sin(C) + \cos(C)$ este:

A dreptunghic B isoscel C echilateral D dreptunghic sau isoscel.

24. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul definit prin

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}}, \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N}^*.$$

Se notează cu $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $\ell = 0$; B $\ell = \frac{\sqrt{2}}{3}$; C $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{Q}$; D $\ell = \infty$.

25. Două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele date prin ecuaţiile:

$$(d_1) : 2x - 3y + 5 = 0$$

$$(d_2) : 3x + 2y - 7 = 0$$

şi unul din vârfurile sale este punctul $A(2, -3)$. Ecuaţiile dreptelor pe care se află celelalte două laturi ale dreptunghiului sunt:

A $2x - 3y - 13 = 0$ şi $3x + 2y = 0$; B $y + 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ şi $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$;

C $2x - 3y + 13 = 0$ şi $3x - 2y = 0$; D $y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ şi $y - 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$.

26. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru şi sistemul de ecuaţii liniare cu 3 necunoscute

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z &= 1 \\ 4x - y + 5z &= 1 \\ 2x + 10y + z &= 1. \end{cases}$$

Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

A Matricea sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α.
B Matricea extinsă a sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α.
C Sistemul dat este incompatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$.
D Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$.

27. Fie $G \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime astfel încât expresia

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \forall x, y \in G$$

defineşte o lege de compoziţie pe G. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A G poate fi intervalul $(0, 2)$.
B G poate fi intervalul $(0, 1)$.
C Dacă $G = (0, 1)$, atunci „$*$" admite un element neutru.
D Dacă $G = (0, 1)$, atunci simetricul lui $\frac{1}{3}$ este $\frac{2}{3}$.

28. Valoarea integralei

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x$$

este:

A 0;
B 1;
C 2;
D 3.

29. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât xy, yz, zx sunt în progresie geometrică cu raţia un număr întreg diferit de 1.

A Dacă y este pătrat perfect, atunci şi z este pătrat perfect.
B Dacă z este pătrat perfect, atunci şi y este pătrat perfect.
C Dacă y este pătrat perfect, atunci şi x este pătrat perfect.
D Dacă z este pătrat perfect, atunci şi x este pătrat perfect.

30. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şirul definit prin $x_n = \int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\, \mathrm{d}x$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $x_{23} = \frac{1}{184}$.
B $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 x_n = 1$.
C $\lim\limits_{n \to \infty} n x_n = \frac{1}{8}$.
D $\lim\limits_{n \to \infty} n x_n = 0$.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Răspunsuri corecte

CONCURSUL MATE-INFO UBB, 2022
Proba scrisă la MATEMATICĂ

1. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

2. $\boxed{\textbf{B}}$

3. $\boxed{\textbf{C}}$

4. $\boxed{\textbf{B}}$

5. $\boxed{\textbf{B}}$

6. $\boxed{\textbf{C}}$

7. $\boxed{\textbf{D}}$

8. $\boxed{\textbf{C}}$

9. $\boxed{\textbf{B}}$

10. $\boxed{\textbf{B}}$

11. $\boxed{\textbf{C}}$

12. $\boxed{\textbf{A}}$

13. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

14. $\boxed{\textbf{B}}$

15. $\boxed{\textbf{B}}$

16. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

17. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

18. $\boxed{\textbf{A}}$

19. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

20. $\boxed{\textbf{C}}$

21. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$

22. $\boxed{\textbf{D}}$

23. $\boxed{\textbf{D}}$

24. $\boxed{\textbf{C}}$

25. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$

26. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

27. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

28. $\boxed{\textbf{A}}$

29. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$

30. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB 2022
Proba scrisă la MATEMATICĂ
SOLUŢII

1. Fie $x = \sin \dfrac{12133}{6}\pi$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $x > 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x < 0$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $\dfrac{12133}{6} = 2022 + \dfrac{1}{6}$ deci $\dfrac{12133}{6}\pi = 2022\pi + \dfrac{\pi}{6}$.
$\sin\left(2022\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. Dacă într-un sistem cartezian de coordonate vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci mijlocul F al segmentului AG are coordonatele

$\boxed{\text{A}}$ $F(0,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $F(\frac{2}{3}, \frac{17}{6})$; $\boxed{\text{C}}$ $F(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$; $\boxed{\text{D}}$ altă valoare.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Coordonatele centrului de greutate sunt: $G\left(\frac{2+(-1)+(-3)}{3}, \frac{3+1+4}{3}\right) = G\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Mijlocul segmentului AG are coordonatele: $F\left(\frac{2+(-2/3)}{2}, \frac{3+8/3}{2}\right) = F\left(\frac{2}{3}, \frac{17}{6}\right)$.

3. Numărul soluţiilor ecuaţiei $3\sin x - 2 = 0$ pe intervalul $[0,\pi]$ este

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ infinit.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă;** $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă;** $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Mulţimea soluţiilor este: $\{\arcsin\frac{2}{3}, \pi - \arcsin\frac{2}{3}\}$, mulţime cu două elemente.

4. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-3} = x^2 - 5$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Ecuaţia nu are soluţii. $\boxed{\text{B}}$ Ecuaţia are exact două soluţii.
$\boxed{\text{C}}$ Ecuaţia are exact patru soluţii. $\boxed{\text{D}}$ Ecuaţia are numai soluţii pozitive.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Din cauza radicalului trebuie să avem $x^2-3 \geq 0$ şi $x^2-5 \geq 0$, deci $x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat obţinem

$$x^2-3=(x^2-5)^2 \iff x^2-3=x^4-10x^2+25 \iff x^4-11x^2+28=0.$$

Prin introducerea notaţiei $y=x^2$ ecuaţia anterioară se poate scrie în formă $y^2-11y+28=0$. Această ecuaţie cvadratică are soluţii $y_1=4$ şi $y_2=7$. De aceea soluţiile ecuaţiei $x^4-11x^2+28=0$ sunt $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-\sqrt{7}$ şi $x_4=\sqrt{7}$. Dintre aceste soluţii numai x_3 şi x_4 satisfac condiţia $x^2-5 \geq 0$, deci ecuaţia $\sqrt{x^2-3}=x^2-5$ are două soluţii şi $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ sunt false, iar $\boxed{\text{B}}$ adevărată. O soluţie este negativă, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

5. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{300}$ este

$\boxed{\text{A}}$ 50; $\boxed{\text{B}}$ 51; $\boxed{\text{C}}$ 52; $\boxed{\text{D}}$ 150.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $T_{k+1}=C_{300}^k 2^{150-\frac{k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$, $0 \leq k \leq 300$.

Pentru ca termenii să fie raţionali este necesar k să fie divizibil atât cu 2 cât şi cu 3, deci k divizibil cu 6. Aşadar $k \in \{0, 6, 12, \ldots, 300\}$. Sunt 51 de termeni raţionali.

6. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Suma elementelor în matricea A^5 este:

$\boxed{\text{A}}$ 19; $\boxed{\text{B}}$ 20; $\boxed{\text{C}}$ 21; $\boxed{\text{D}}$ 22.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Observăm că $A^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este șirul lui Fibonacci definit prin $F_0=0$, $F_1=1$ și $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Suma elementelor în A^n este

$$S_n=(F_{n+1}+F_n)+(F_n+F_{n-1})=F_{n+2}+F_{n+1}=F_{n+3}.$$

Prin urmare $S_5=F_8=21$.

Rezultatul poate fi obținut și prin calcularea matricelor A^2, A^4 şi $A^5=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive, cu proprietatea că $(n+1)x_{n+1}-nx_n<0$, oricare ar fi $n \geq 1$. Atunci limita şirului este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ nu există; $\boxed{\text{D}}$ 0.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Avem $x_1>2x_2>3x_3>\ldots>nx_n \quad \Rightarrow \quad 0<x_n<\dfrac{x_1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

8. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x<0 \\ x^3+x+\alpha & \text{dacă } x\geq 0, \end{cases}$$

este continuă dacă:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 0$; $\boxed{\text{D}}$ nu există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia să fie continuă.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Funcţia f este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$, deci trebuie studiată continuitatea în punctul $x = 0$. Avem

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \qquad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^3 + x + \alpha) = \alpha = f(0).$$

Folosind definiţia continuităţii cu ajutorul limitelor laterale, deducem că $\alpha = 0$.

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ în punctul de abscisă $x = 9$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-12y + x - 15 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $12y - x - 15 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $y - 12x - 15 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y + 12x + 15 = 0$.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Ţinând cont de faptul că $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, obţinem ecuaţia tangentei

$$y - f(9) = f'(9)(x - 9) \qquad \Leftrightarrow \qquad y - 2 = \frac{1}{12}(x - 9) \qquad \Leftrightarrow \qquad 12y - x - 15 = 0.$$

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1$$

este

$\boxed{\text{A}}$ $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{\frac{\pi}{8} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow$
$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Deci afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată iar $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

11. Vârfurile A şi B ale paralelogramului $ABCD$ se găsesc pe dreapta de ecuaţie $3x - y - 4 = 0$, iar punctul de intersecţie O al diagonalelor AC şi BD are coordonatele $(3, 4)$. Dacă coordonatele vârfului A sunt $(0, -4)$, atunci ecuaţia dreptei CD este:

$\boxed{\text{A}}$ $x + 3y - 42 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x - 3y - 6 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $3x - y - 6 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 3x + 6$.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Punctul C este simetricul lui A faţă de O, deci avem

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{0 + x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = 6$$

şi

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \;\Leftrightarrow\; 4 = \frac{-4 + y_C}{2} \;\Leftrightarrow\; y_C = 12.$$

Panta dreptei CD este egală cu panta dreptei AB, adică este 3. Deci ecuaţia dreptei CD este

$$y - 12 = 3(x - 6) \;\Leftrightarrow\; 3x - y - 6 = 0.$$

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x - [2x]$, unde prin $[a]$ se notează partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ f are perioada $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ f este injectivă; $\boxed{\text{C}}$ f este surjectivă; $\boxed{\text{D}}$ f este pară.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Funcţia f are perioada $\frac{1}{2}$, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 2x + 1 - [2x + 1] = 2x - [2x] = f(x).$$

Aceasta arată şi că f nu este injectivă şi nici surjectivă, deoarece imaginea funcţiei f coincide cu imaginea restricţiei lui f pe intervalul $[0, \frac{1}{2}]$, deci $2 \notin \operatorname{Im} f$. Cum $f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ şi $f(-\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$, funcţia f nu este pară.

13. Fie suma $S_n = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde i este unitatea imaginară ($i^2 = -1$). Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ S_{2020} este un număr real. $\boxed{\text{B}}$ $|S_{2020}|$ este un număr iraţional.
$\boxed{\text{C}}$ Partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011. $\boxed{\text{D}}$ $|S_{2022}| = 1011$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Se ştie că $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Considerăm sumele intermediare:
$s_1 = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i\,,$
$s_2 = 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 2 - 2i\,,$
$\ldots$
$s_{505} = 2017i^{2017} + 2018i^{2018} + 2019i^{2019} + 2020i^{2020} = 2 - 2i.$
Avem

$$S_{2020} = s_1 + s_2 + \ldots + s_{505} = 505(2 - 2i) = 1010(1 - i),$$

deci S_{2020} nu este un număr real, iar $|S_{2020}| = 1010\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, adică $|S_{2020}|$ este un număr iraţional. Scriem

$$S_{2022} = S_{2020} + 2021i^{2021} + 2022i^{2022} = 1010(1 - i) + 2021i - 2022 = -1012 + 1011i,$$

deci partea imaginară a lui S_{2022} este egală cu 1011, iar $|S_{2022}| = \sqrt{(-1012)^2 + 1011^2} \neq 1011$.

14. Fie $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 0 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1. \end{cases}$$

Valoarea expresiei $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 10.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o soluţie pentru acest sistem. Dacă notăm cu $A = \log_{225} x$ şi $B = \log_{64} y$, atunci din prima ecuaţie deducem $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. Folosind a doua ecuaţie deducem $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = 1$, deci $A = 2$ şi $B = -2$. Aşadar, $\log_{225} x = 2$, deci $x = 225^2 = 15^4$. Similar, $\log_{64} y = -2$, deci $y = 64^{-2} = 2^{-12}$.

Obţinem atunci că expresia cerută $\log_{30}\left(x^3\right) - \log_{30} y = \log_{30}(15^{12} \cdot 2^{12}) = 12$, deci răspunsul corect este $\boxed{B}$.

15. Suma soluţiilor ecuaţiei $6^{x+1} - 4^x = 3^{2x}$ este

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Putem transcrie ecuaţia în

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}.$$

Notând $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, obţinem ecuaţia de gradul doi $t^2 - 6t + 1 = 0$, cu soluţiile $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Dacă $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$ şi $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$, atunci

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2} = t_1 \cdot t_2 = 9 - 8 = 1,$$

deci $x_1 + x_2 = 0$.

16. Punctul $A(3, 1)$ este vârful unui pătrat în care o diagonală se află pe dreapta de ecuaţie $y - x = 0$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Distanţa de la vârful A la această diagonală este egală cu 2.

$\boxed{\text{B}}$ Ecuaţia dreptei pe care se află cealaltă diagonală este $x + y + 2 = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Aria pătratului este 4.

$\boxed{\text{D}}$ Punctul $C(1, 3)$ este de asemenea vârf al pătratului.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Distanţa de la A la dreapta dată este

$$d = \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

Diagonala a doua a pătratului trece prin punctul A şi este perpendiculară pe diagonala dată. Prin urmare $d_2 : y - 1 = (-1)(x - 3)$, deci $d_2 : x + y - 4 = 0$. Aria pătratului este egală cu jumătate din pătratul lungimii diagonalei, deci $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$. Punctul $C(1, 3)$ este simetricul lui A în raport cu diagonala dată.

17. Fie triunghiul ABC, în care notăm $BC = a, AC = b, AB = c$. Presupunem că lungimea medianei AM este egală cu c. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $a^2 + 2c^2 = 3b^2$; $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + 2c^2 = 2b^2$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos C = \frac{4a}{3b}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos C = \frac{3a}{4b}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Din teorema medianei deducem că $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Folosind ipoteza $AM = c$ deducem $a^2+2c^2 = 2b^2$. Deci răspunsul $\boxed{\mathbf{A}}$ este fals şi răspunsul $\boxed{\mathbf{B}}$ este adevărat. Utilizând în relaţia anterioară, teorema cosinusului pentru latura AB obţinem $3a = 4b\cos C$. Deci afirmaţia $\boxed{\mathbf{D}}$ este adevărată şi afirmaţia $\boxed{\mathbf{C}}$ falsă.

18. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Răspuns:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Prin calcul obţinem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x}{\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

19. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in (0,\infty)$.

$\boxed{\text{C}}$ Funcţia f este impară.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Răspuns:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Din faptul că

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

rezultă că funcţia f este constantă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă imediat că doar afirmaţiile $\boxed{\mathbf{B}}$ şi $\boxed{\mathbf{D}}$ sunt adevărate.

20. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\mathrm{e}^x = -\dfrac{1}{3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Răspuns:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x\mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Tabelul următor rezumă variaţia lui f.

x	$-\infty$			-1			∞
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

Cum $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} < -\dfrac{1}{3} < 0$, din tabel reiese că ecuaţia $xe^x = -\dfrac{1}{3}$ are exact două soluţii.

21. Fie ABC un triunghi şi $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$ astfel încât $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha$. Dacă $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ este aria triunghiului $A'B'C'$, atunci

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha)$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$;
$\boxed{\text{C}}$ $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 12\alpha^2(1-\alpha)^2$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Răspuns: $\boxed{\text{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\text{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\text{C}}$ **falsă**; $\boxed{\text{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = \alpha \in [0,1]$. Din formula ariei cu sinus, ariile triunghiurilor $AB'C'$, $A'BC'$ şi $A'B'C$ sunt egale cu $\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$. Rezultă $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \mathcal{A}_{ABC} - 3\alpha(1-\alpha)\mathcal{A}_{ABC}$, deci

$$\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1 - 3\alpha(1-\alpha) = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 3\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right].$$

22. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\int_1^{\operatorname{tg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ π; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, este continuă, deci admite primitive. Fie F o primitiva a lui f. Avem

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\operatorname{tg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t}{\int_1^{\operatorname{ctg} x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{F(\operatorname{tg} x) - F(1)}{F(\operatorname{ctg} x) - F(1)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{f(\operatorname{ctg} x)(-1 - \operatorname{ctg}^2 x)} = -1.$$

23. Triunghiul ABC în care are loc relaţia $\sin(B) + \cos(B) = \sin(C) + \cos(C)$ este:
$\boxed{\text{A}}$ dreptunghic $\boxed{\text{B}}$ isoscel $\boxed{\text{C}}$ echilateral $\boxed{\text{D}}$ dreptunghic sau isoscel.

Răspuns: $\boxed{\text{A}}$ **falsă**; $\boxed{\text{B}}$ **falsă**; $\boxed{\text{C}}$ **falsă**; $\boxed{\text{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Rescriem relaţia dată astfel: $\sin(B) - \sin(C) = \cos(C) - \cos(B)$. Transformăm diferenţele în produse şi obţinem:

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

sau

$$\sin\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2}\right) = 0.$$

Din $\sin\frac{B-C}{2} = 0$ se obţine $B - C = 0$, deci triunghiul este isoscel. Relaţia $\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2} = 0$ poate fi rescrisă $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)$ de unde $B + C = \frac{\pi}{2}$, deci în acest caz triunghiul este dreptunghic.

24. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şirul definit prin

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}}, \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N}^*.$$

Se notează cu $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $\ell = 0$; B $\ell = \frac{\sqrt{2}}{3}$; C $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{Q}$; D $\ell = \infty$.

Răspuns:

A falsă; **B falsă**; **C adevărată**; **D falsă**.

Soluţie: Se observă că

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right) \qquad \text{pentru fiecare } n \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră diviziunea $\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ a intervalului $[0,1]$ şi $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ sistemul de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ termenul a_n este suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ_n şi sistemului de puncte intermediare ξ_n, adică $a_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n)$. Întrucât $\lim_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, integrabilitatea funcţiei f implică

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Rezultă că doar afirmaţia **C** este adevărată.

25. Două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele date prin ecuaţiile:

$$(d_1) : 2x - 3y + 5 = 0$$

$$(d_2) : 3x + 2y - 7 = 0$$

şi unul din vârfurile sale este punctul $A(2, -3)$. Ecuaţiile dreptelor pe care se află celelalte două laturi ale dreptunghiului sunt:

A $2x - 3y - 13 = 0$ şi $3x + 2y = 0$; B $y + 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ şi $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$;

C $2x - 3y + 13 = 0$ şi $3x - 2y = 0$; D $y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ şi $y - 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$.

Răspuns:

A adevărată; **B adevărată**; **C falsă**; **D falsă**.

Soluţie: Se observă că dreptele d_1 si d_2 sunt perpendiculare având pantele $m_1 = \frac{2}{3}$ şi $m_2 = -\frac{3}{2}$ şi nu trec prin punctul A. Astfel celelalte laturi ale dreptunghiului trec prin A şi sunt paralele cu d_1, respectiv d_2. Dreapta paralelă dusă prin A la d_1 are ecuaţia: $2x - 3y - 13 = 0$ sau $y + 3 = \frac{2}{3}(x-2)$. Dreapta paralelă dusă prin A la d_2 are ecuaţia: $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$ sau $3x + 2y = 0$.

26. Considerăm $\alpha \in \mathbb{C}$ un parametru şi sistemul de ecuaţii liniare cu 3 necunoscute

$$\begin{cases} 2x + \alpha y + 2z &= 1 \\ 4x - y + 5z &= 1 \\ 2x + 10y + z &= 1. \end{cases}$$

Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

A Matricea sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α.

B Matricea extinsă a sistemului are rang 3 pentru orice valoare a lui α.

C Sistemul dat este incompatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$.

$\boxed{\text{D}}$ Sistemul dat este compatibil dacă şi numai dacă $\alpha \neq 3$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie:
Matricea sistemului şi matricea extinsă a sistemului sunt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $\det(A) = 6\alpha - 18 = 0$ dacă şi numai dacă $\alpha = 3$, deci sistemul este compatibil dacă $\alpha \neq 3$. În cazul când $\alpha = 3$ avem $\operatorname{rang}(A) = 2$ şi $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$, deci din teorema Kronecker-Capelli urmează că sistemul este incompatibil pentru $\alpha = 3$.

27. Fie $G \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime astfel încât expresia

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}, \forall x, y \in G$$

defineşte o lege de compoziţie pe G. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ G poate fi intervalul $(0, 2)$. $\boxed{\text{B}}$ G poate fi intervalul $(0, 1)$.
$\boxed{\text{C}}$ Dacă $G = (0, 1)$, atunci ,,$*$" admite un element neutru.
$\boxed{\text{D}}$ Dacă $G = (0, 1)$, atunci simetricul lui $\frac{1}{3}$ este $\frac{2}{3}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Pentru $x = \frac{1}{4}$ şi $y = \frac{3}{2}$ expresia din numitor este 0, deci $\boxed{\textbf{A}}$ este fals. Dacă $0 < x, y < 1$, atunci $xy > 0$ şi $(1 - x)(1 - y) > 0$; adunând, obţinem $2xy - x - y + 1 > 0$; de aici rezultă uşor că $0 < x * y < 1$, deci $\boxed{\textbf{B}}$ este adevărat. Din condiţia $x * e = x$ pentru orice $x \in (0, 1)$ obţinem că elementul neutru este $e = \frac{1}{2}$, deci $\boxed{\textbf{C}}$ este adevărat. Din $x * x' = \frac{1}{2}$ obţinem $x' = 1 - x$, deci $\boxed{\textbf{D}}$ este adevărat.

28. Valoarea integralei

$$\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$. Atunci $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ şi

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_{2022}^{\frac{1}{2022}} \frac{\ln \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^2 + 1} \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{-\ln t}{t^2 + 1} \mathrm{d}t = \\ &= -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln t}{t^2 + 1} \mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1 + x^2} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

În consecinţă, avem $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2022}}^{2022} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = 0$.

29. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât xy, yz, zx sunt în progresie geometrică cu raţia un număr întreg diferit de 1.

$\boxed{\text{A}}$ Dacă y este pătrat perfect, atunci şi z este pătrat perfect.
$\boxed{\text{B}}$ Dacă z este pătrat perfect, atunci şi y este pătrat perfect.
$\boxed{\text{C}}$ Dacă y este pătrat perfect, atunci şi x este pătrat perfect.
$\boxed{\text{D}}$ Dacă z este pătrat perfect, atunci şi x este pătrat perfect.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie:

Fie q raţia progresiei geometrice. Rezulă că $qxy = yz$ şi $qyz = zx$, adică $q^2xy = zx$. Prin urmare, $z = q^2y$, deci $\boxed{\textbf{A}}$ şi $\boxed{\textbf{B}}$ sunt adevărate.

Pentru $y = 1$, $x = 2$ şi $z = 4$ condiţiile cerute sunt satisfăcute, y şi z sunt pătrate perfecte iar x nu este, deci răspunsurile $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false.

30. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul definit prin $x_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\,\mathrm{d}x$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $x_{23} = \frac{1}{184}$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x_n = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = \dfrac{1}{8}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 0$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$x_n = \int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x}\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{8n}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{2n}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8n}.$$

Întrucât $184 = 8 \cdot 23$, rezultă că doar afirmaţiile $\boxed{\textbf{A}}$ şi $\boxed{\textbf{C}}$ sunt adevărate.