**Examenul național de bacalaureat 2024**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***

**Varianta 10**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Arătați că $\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=2$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Determinați numărul real $a$ pentru care $f(a)=6$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+1}=3$. |
| **5p** | **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizibil cu $20$. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2,0)$, $B(8,8)$ și $C(11,4)$. Arătați că $AB=2BC$. |
| **5p** | **6.** Arătați că $1+\sin 30°=2\sin 60°\cdot\cos 30°$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x & x-1\\ -2x & 2\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $A(2)+A(0)=2A(1)$. |
| **5p** | **c)** Determinați numerele reale $x$ pentru care $\det(A(x)+xI_2)=2$. |
| | **2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(x+y)-xy-4$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $1\circ 3=1$. |
| **5p** | **b)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă. |
| **5p** | **c)** Determinați numerele naturale $n$ pentru care $n\circ n\geq n-2$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$. |
| **5p** | **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$. |
| **5p** | **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$. |
| | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=2$. |
| **5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 3$. |
| **5p** | **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\left(x^2+x+1\right)f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $e+1$. |

**Examenul național de bacalaureat 2024**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 10**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=$ | **2p** |
| | $=\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{6}=2$ | **3p** |
| **2.** | $f(a)=5a+1$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| | $5a+1=6$, de unde obținem $a=1$ | **3p** |
| **3.** | $4x+1=9$, de unde obținem $4x=8$ | **3p** |
| | $x=2$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $A$ are $9$ elemente, deci sunt $9$ cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele din mulțimea $A$ care sunt divizibile cu $20$ sunt $20$, $40$, $60$ și $80$, deci sunt $4$ cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{9}$ | **3p** |
| **5.** | $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ | **2p** |
| | $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$, deci $AB=2BC$ | **3p** |
| **6.** | $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ | **3p** |
| | $1+\sin 30^\circ=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $2\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-2)\cdot 0=$ | **3p** |
| | $=2-0=2$ | **2p** |
| **b)** | $A(2)+A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 4\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=2A(1)$ | **2p** |
| **c)** | $A(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x & x-1\\ -2x & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x-1\\ -2x & 2+x\end{pmatrix}$ și $\det(A(x)+xI_2)=4x^2+2x$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $4x^2+2x-2=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| **2.a)** | $1\circ 3=2(1+3)-1\cdot 3-4=$ | **3p** |
| | $=8-3-4=1$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $y \circ x = 2(y+x) - yx - 4 =$ | **2p** |
| | $= 2(x+y) - xy - 4 = x \circ y$, pentru orice numere reale $x$ și $y$, deci legea de compoziție „$\circ$" este comutativă | **3p** |
| **c)** | $n \circ n = 4n - n^2 - 4$, pentru orice număr natural $n$ | **2p** |
| | $4n - n^2 - 4 \geq n - 2 \Leftrightarrow -n^2 + 3n - 2 \geq 0$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 1$ și $n = 2$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x) = \dfrac{(2x-1)' \cdot x^2 - (2x-1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \dfrac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} =$ | **3p** |
| | $= \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^4} = \dfrac{2(1-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ | **2p** |
| | Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 1$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,1]$; | **3p** |
| | $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 (x^2+x+1) f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+x+1) \cdot \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 (2x+1)\,dx = (x^2+x)\Big\vert_0^1 =$ | **3p** |
| | $= 1 + 1 - 0 - 0 = 2$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1)\Big\vert_0^1 =$ | **3p** |
| | $= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ | **2p** |
| **c)** | $g(x) = e^x(2x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{A} = \int_0^1 \lvert g(x) \rvert dx = \int_0^1 e^x(2x+1) dx = e^x(2x+1)\Big\vert_0^1 - \int_0^1 2e^x dx =$ | **3p** |
| | $= e^x(2x+1)\Big\vert_0^1 - 2e^x\Big\vert_0^1 = 3e - 1 - 2e + 2 = e + 1$ | **2p** |