Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 8$ și $a_3 = 12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)=m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6\left(9-x^2\right)=\log_6 5$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $\sqrt{2n+1}$ să aparțină mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(4,4)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în C.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=2\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3x}{4}\right)^2$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}a & a+1\\ a-3 & 4a-1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=7$.

5p **b)** Arătați că $B(2)-B(0)\cdot B(1)=4A$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a)-aA$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-2x-3y+6$.

5p **a)** Arătați că $2*2=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*6=x$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $x*(2*x)\geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x^2+x+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+x+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)-f(4-x)\leq 1$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=1+2\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2\left(x^2-1\right)e^x f(x)\,dx=e(e+a)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Rația progresiei este $r=a_3-a_2=4$	**3p**
	$a_1=a_2-r=4$	**2p**
2.	$f(m)=3m-2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$3m-2=m$, de unde obținem $m=1$	**3p**
3.	$9-x^2=5$, de unde obținem $x^2-4=0$	**2p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $\sqrt{2n+1}$ aparține mulțimii A sunt 0 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**3p**
5.	$m_{AC}=\frac{1}{2}$	**2p**
	$m_{BC}=-2 \Rightarrow m_{AC}\cdot m_{BC}=-1$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în C	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{4}=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-2\cdot(-2)=$	**3p**
	$=3+4=7$	**2p**
b)	$B(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$, $B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & -9\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(2)-B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}=4A$	**2p**
c)	$C(a)=\begin{pmatrix}0 & a+1\\ a-3 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(C(a))=-(a-3)(a+1)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(C(a))=0$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=3$	**2p**
2.a)	$2*2=2\cdot 2-2\cdot 2-3\cdot 2+6=$	**3p**
	$=4-4-6+6=0$	**2p**
b)	$x*6=4x-12$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x-12=x$, de unde obținem $x=4$	**2p**
c)	$2*x=2-x$, $x*(2*x)=-x^2+3x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2+3x\geq 2 \Leftrightarrow -x^2+3x-2\geq 0$, de unde obținem $x\in[1,2]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x+4\right)-2x(2x+1)}{\left(x^2+x+4\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{8-2x^2}{\left(x^2+x+4\right)^2}=\dfrac{2\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+x+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=-2$ sau $x=2$; pentru orice $x\in(-\infty,-2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-2]$; pentru orice $x\in[-2,2]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[-2,2]$; pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$x\in[4,+\infty)\Rightarrow 4-x\in(-\infty,0]$, deci $f(x)\le f(4)$ și $f(4-x)\ge f(-2)$ și, cum $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$ și $f(4)=\dfrac{1}{3}$, obținem $f(x)-f(4-x)\le 1$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2(x+1)f(x)dx=\int\limits_0^2(x+3)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+6=8$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x+3}{x+1}dx=\int\limits_0^1\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)dx=x\Big\vert_0^1+2\ln(x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+2\ln 2-2\ln 1=1+2\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_1^2\left(x^2-1\right)e^x f(x)dx=\int\limits_1^2\left(x^2+2x-3\right)e^x dx=\left(x^2-3\right)e^x\Big\vert_1^2=e^2+2e$	**3p**
	$e(e+a)=e^2+2e$, de unde obținem $a=2$	**2p**