

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2\lg 100 + \lg 2 + \lg 5 = 5$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(3a) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{3x} \cdot 5^2 = 5^x$.
- 5p** 4. Determinați câte submulțimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulțimea $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{AC} = \overline{OB}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 18 și $B = \frac{\pi}{4}$. Arătați că $AB = 6$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(M(1)) = 7$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $M(x) \cdot M(2) = M(x-1)$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care $2\det(M(n)) \leq \det(M(2n))$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - aX + 2a$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(2) = 0$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Pentru $a = 1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 1$.
- 5p** c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x - 4) + x^2 - 2x + 4$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2(x-1)(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} = 4$.
- 5p** c) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_3^4 f(x)(3x^2 + 1) dx = 14$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} \ln 2$.

5p c) Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{4 \ln x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ este egală cu $\frac{3e^2 + 5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2\lg 100 + \lg 2 + \lg 5 = 2 \cdot 2 + \lg 10 =$ $= 4 + 1 = 5$	3p 2p
2.	$f(a) = a - 6, f(3a) = 3a - 6$ $a - 6 + 3a - 6 = 0$, de unde obținem $a = 3$	3p 2p
3.	$5^{3x+2} = 5^x$, de unde obținem $3x + 2 = x$ $x = -1$	3p 2p
4.	În mulțimea A sunt 4 numere pare Sunt $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ submulțimi cu două elemente, ambele numere pare	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AC} = (x_C - 3)\vec{i} + (y_C - 1)\vec{j}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$ $(x_C - 3)\vec{i} + (y_C - 1)\vec{j} = 3\vec{i}$, de unde obținem $x_C = 6$ și $y_C = 1$	3p 2p
6.	$AB = AC$ $\frac{AB \cdot AB}{2} = 18$, deci $AB^2 = 36$, de unde obținem $AB = 6$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 9 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 = 7$	2p 3p
b)	$M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, M(x) \cdot M(2) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 8x+8 & 6x+4 \\ 0 & 12x+8 & 8x+8 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 8x+8 & 6x+4 \\ 0 & 12x+8 & 8x+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & x-1 \\ 0 & 2x-2 & x+1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p
c)	$\det(M(n)) = n(-n^2 + 4n + 4), \det(M(2n)) = 2n(-4n^2 + 8n + 4)$, pentru orice număr natural n $2n(-n^2 + 4n + 4) \leq 2n(-4n^2 + 8n + 4)$, de unde obținem $n^2(3n - 4) \leq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ și $n = 1$	2p 3p
2.a)	$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + 2a =$ $= 8 - 8 - 2a + 2a = 0$, pentru orice număr real a	3p 2p

b)	$f = X^3 - 2X^2 - X + 2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 =$ $= -1 - 2 + 1 + 2 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 1$	3p 2p
c)	$f = (X - 2)(X^2 - a)$; $x_1 = 2$ și $ x_2 = x_3 = \sqrt{a}$, deci $ x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 2\sqrt{a}$ $2 + 2\sqrt{a} = 8$, de unde obținem $a = 9$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(2x - 4) + 2e^x + 2x - 2 =$ $= e^x(2x - 2) + 2x - 2 = 2(x - 1)(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(1 - e^x)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - 1)(e^x + 1)}{-e^x} = 4$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ și, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 3 - 2e < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții	2p 3p
2.a)	$\int_3^4 f(x)(3x^2 + 1) dx = \int_3^4 4x dx = 2x^2 \Big _3^4 =$ $= 32 - 18 = 14$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{4x}{3x^2 + 1} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(3x^2 + 1)'}{3x^2 + 1} dx = \frac{2}{3} \ln(3x^2 + 1) \Big _0^1 =$ $= \frac{2}{3} \ln 4 - \frac{2}{3} \ln 1 = \frac{4}{3} \ln 2$	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{(3x^2 + 1) \ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, deci $\mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \left(3x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{3x^2}{2}\right)' \ln x dx +$ $+ \frac{\ln^2 x}{2} \Big _1^e =$ $= 3 \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) \Big _1^e + \frac{1}{2} = \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3e^2 + 5}{4}$	3p 2p