Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 5$ și $a_3 = 35$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)=f(0)\cdot f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-4}=\sqrt[3]{3x-6}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2<100$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,5)$ și C, astfel încât B este mijlocul segmentului AC. Determinați coordonatele punctului C.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=AC$ și aria egală cu 18. Arătați că $BC=6\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 3x\\ -x & 1+4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=3$.

5p **b)** Arătați că $xA(y)-A(xy)=(x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(1)\cdot A(x-1)=xA(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=\frac{1}{4}(x+1)(y+1)-1$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 5=2$.

5p **b)** Arătați că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\leq n$, pentru care $m\circ n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-1+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3x}{\ln x}=3$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+f(y)\leq -\frac{21}{4}$, pentru orice $x\in(0,1]$ și orice $y\in[1,2]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 f(x)\,dx=\frac{8}{3}$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi\ln(4e)$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{5+35}{2}=$	**3p**
	$=\frac{40}{2}=20$	**2p**
2.	$f(0)=3$, $f(1)=5$, $f(m)=2m+3$, pentru orice număr real m	**3p**
	$2m+3=3\cdot 5$, de unde obținem $m=6$	**2p**
3.	$x^2-4=3x-6$, de unde obținem $x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 6 numere n pentru care $3n^2<100$, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$	**3p**
5.	$2=\frac{0+x_C}{2}$ și $5=\frac{2+y_C}{2}$	**3p**
	$C(4,8)$	**2p**
6.	$18=\frac{AB\cdot AC}{2}$, deci $AB=AC=6$	**3p**
	$BC^2=72$, de unde obținem $BC=6\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -2 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}-1 & 6\\ -2 & 9\end{vmatrix}=(-1)\cdot 9-6\cdot(-2)=$	**3p**
	$=-9+12=3$	**2p**
b)	$xA(y)-A(xy)=\begin{pmatrix}x-xy & 3xy\\ -xy & x+4xy\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-xy & 3xy\\ -xy & 1+4xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & 0\\ 0 & x-1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=(x-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(x-1)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-x & 3x-3\\ -x+1 & 4x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3x & 12x-9\\ 3-4x & 17x-12\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}3-3x & 12x-9\\ 3-4x & 17x-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x^2 & 3x^2\\ -x^2 & 4x^2+x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$ sau $x=3$	**2p**
2.a)	$1\circ 5=\frac{1}{4}(1+1)(5+1)-1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**

b)	$x\circ 3=\frac{1}{4}(x+1)(3+1)-1=x+1-1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3\circ x=\frac{1}{4}(3+1)(x+1)-1=x+1-1=x$, pentru orice număr real x, deci $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$\frac{1}{4}(m+1)(n+1)-1=3\Leftrightarrow(m+1)(n+1)=16$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, cu $m\le n$, obținem perechile $(0,15)$, $(1,7)$ și $(3,3)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(\ln x)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=3$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$; pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$ și, pentru orice $x\in[1,2]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,2]$	**3p**
	Pentru orice $x\in(0,1]$ și orice $y\in[1,2]$, rezultă $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$ și $f(y)\le f(2)$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}-\ln 2$ și $f(2)=-3+\ln 2$, obținem $f(x)+f(y)\le-\frac{21}{4}$	**2p**
2.a)	$\int_2^4 f(x)\sqrt{x}\,dx=\int_2^4(x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_2^4-x\Big\|_2^4=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big\|_1^4-2\sqrt{x}\Big\|_1^4=$	**3p**
	$=\frac{14}{3}-2=\frac{8}{3}$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{\sqrt{2x}}{x-1}$, $x\in[2,3]$, deci $V=\pi\int_2^3(g(x))^2\,dx=2\pi\int_2^3\frac{x}{(x-1)^2}\,dx=$	**2p**
	$=2\pi\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=2\pi\left(\ln(x-1)\Big\|_2^3-\frac{1}{x-1}\Big\|_2^3\right)=\pi\ln(4e)$	**3p**