Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(4-5i)+5i(3+2i)=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(g\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(6x-x^2\right)=\log_2(4+x)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{3,4,5,7,9\}$. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$ și $B(6,4)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=4$ și raza cercului circumscris egală cu 4. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+2az=a+1 \\ ax+y=0 \\ x+y-az=-1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0=a$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-3X^3+X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $(x_1x_2x_3x_4)^2-x_1-x_2-x_3-x_4=1$, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=0$, determinați numerele reale a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-a$ este egal cu a.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+6}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(7x)-f(x)\le 2\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-1+e^{2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \left(f(x)-e^{2x}\right)dx=24$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 4x\left(f(x)-3x^2+1\right)dx=e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{f(t)}{t+1}dt=1$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(4-5i)+5i(3+2i)=12-15i+15i+10i^2=$	**3p**
	$=12-10=2$	**2p**
2.	$f(1)=5$, $(g\circ f)(1)=g(5)=10+a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$10+a=1$, de unde obținem $a=-9$	**2p**
3.	$6x-x^2=4+x$, de unde obținem $x^2-5x+4=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=x_C\vec{i}+(y_C-2)\vec{j}$	**2p**
	$2x_C\vec{i}+2(y_C-2)\vec{j}=6\vec{i}+4\vec{j}$, de unde obținem $x_C=3$ și $y_C=4$	**3p**
6.	$BC=8$, de unde obținem $AC=4\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&1&4\\2&1&0\\1&1&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-4+8+0-4-0+4=4$	**3p**
b)	$a=1\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=2\\x+y=0\\x+y-z=-1\end{cases}$ și $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0$ și $\begin{vmatrix}1&2&2\\1&0&0\\1&-1&-1\end{vmatrix}=0$, deci sistemul de ecuații are o infinitate de soluții	**3p**
c)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&2a\\a&1&0\\1&1&-a\end{vmatrix}=2a^2-2a$, pentru orice număr real a și, cum sistemul de ecuații are soluție unică, obținem $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$	**2p**
	Obținem $x_0=-\dfrac{1}{2}$, deci $a=-\dfrac{1}{2}$, care convine	**3p**
2.a)	$f=X^4-3X^3+X^2-2X+3\Rightarrow f(1)=1^4-3\cdot 1^3+1^2-2\cdot 1+3=$	**3p**
	$=1-3+1-2+3=0$	**2p**

b)	$x_1x_2x_3x_4 = m$, $x_1+x_2+x_3+x_4=3 \Rightarrow (x_1x_2x_3x_4)^2 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = m^2-3$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m^2-3=1$, deci $m^2-4=0$, de unde obținem $m=-2$ sau $m=2$	**2p**
c)	$f = X^4-3X^3+X^2-2X$ și $f(a)=a$, de unde obținem $a^4-3a^3+a^2-3a=0$	**3p**
	$a(a-3)(a^2+1)=0$ și, cum a este număr real, obținem $a=0$ sau $a=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{x^2+1}-(x^2+6)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^3+2x-x^3-6x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x(x^2-4)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=6$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=6$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in[0,2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,2]$ și, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$x\in[0,1]\Rightarrow 7x\in[0,7]$, $f(0)=6$, $f(1)=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$, $f(7)=\dfrac{11}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $\dfrac{7}{\sqrt{2}}\le f(x)$ și $f(7x)\le\dfrac{11}{\sqrt{2}}$, deci $f(7x)-f(x)\le 2\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3\left(f(x)-e^{2x}\right)dx=\int_0^3\left(3x^2-1\right)dx=\left(x^3-x\right)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=24-0=24$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 4x\left(f(x)-3x^2+1\right)dx=\int_0^1 2x\left(e^{2x}\right)'dx=2xe^{2x}\Big\|_0^1-e^{2x}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=2e^2-e^2+1=e^2+1$	**2p**
c)	$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{f(t)}{t+1}dt=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x\frac{f(t)}{t+1}dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x(x+1)}=$	**3p**
	$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{4x+2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+2e^{2x}}{4x+2}=1$	**2p**