

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = 3$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a) + f(a+1) = 5$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-4} = 25$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, acesta să fie un număr divizibil cu 10.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,1)$ și $B(2,5)$. Calculați lungimea segmentului OM , unde M este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Arătați că $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 4 & a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = 36$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.
- 5p c) Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x) \cdot M(y) = A$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX - 6$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(1) = m - 5$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Pentru $m = -7$, determinați numerele reale p și q , pentru care $f = (X+1)(X^2 + pX + q)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3x(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \geq -1$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x \in (-\infty, 1] \\ 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$.
- 5p b) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x) dx = \frac{n^2 - 4 + \ln^2 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{4-1}{2} \cdot \frac{9-1}{3} \cdot \frac{16-1}{4} \cdot \frac{1}{5} =$ $= \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} = 3$	3p 2p
2.	$a^2 + 2 + (a+1)^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow 2a^2 + 2a = 0$ $a = -1$ sau $a = 0$	3p 2p
3.	$5^{2x-4} = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 2$ $x = 3$	3p 2p
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile În mulțimea M sunt 5 numere divizibile cu 10, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{9}$	1p 2p 2p
5.	$M(4,3)$ $OM = 5$	2p 3p
6.	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 4 \cdot 1 =$ $= 40 - 4 = 36$	3p 2p
b)	$\det(M(a)) = \begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ 4 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 - a - 6$ $M(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(M(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$	2p 3p
c)	$\begin{pmatrix} xy - 2x - 2y + 8 & x + y - 1 \\ 4x + 4y - 4 & xy + x + y + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow xy = 1 \text{ și } x + y = 2$ $x = 1, y = 1$	3p 2p
2.a)	$f(1) = 1^3 + m \cdot 1 - 6 =$ $= 1 + m - 6 = m - 5$, pentru orice număr real m	3p 2p

b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2m$ $-2m = 4 \Leftrightarrow m = -2$	3p 2p
c)	$X^3 - 7X - 6 = X^3 + (p+1)X^2 + (p+q)X + q$ $p = -1, q = -6$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x =$ $= 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(1) = 1, f'(1) = -3$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -3x + 4$	2p 3p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, 2]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$ $f(x) \geq f(2)$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și $f(2) = -1$, deci $f(x) \geq -1$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 - x) dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} \right) \Big _{-1}^1 =$ $= \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} \right) = 2$	3p 2p
b)	Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (3x^2 - x) = 2$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(2 + \frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = 2$ și $f(1) = 2$, obținem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, deci funcția f este continuă în $x = 1$ Cum funcția f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	3p 2p
c)	$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 - x) dx + \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{x} \cdot \ln x \right) dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 + 2x \Big _1^2 + \frac{\ln^2 x}{2} \Big _1^2 = \frac{5 + \ln^2 2}{2}$ $\frac{5 + \ln^2 2}{2} = \frac{n^2 - 4 + \ln^2 2}{2} \Leftrightarrow n^2 - 9 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	3p 2p