

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{12}=0$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , pentru care graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{x}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 , de ecuație $y = ax + 2$ și d_2 , de ecuație $y = \frac{x}{4} + 1$. Determinați numărul real a , știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
- 5p 6. Arătați că $\sin(\pi - x)\cos(2\pi + x) - \sin(2\pi + x)\cos(\pi - x) = \sin 2x$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $M(x) - M(2018) = M(-2018) - M(-x)$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n) = M(mn)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 8xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = 8\left(x + \frac{1}{8}\right)\left(y + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = 1$.
- 5p c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x + 1$. Demonstrați că $f(x \circ y \circ z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$, pentru orice numere reale x , y și z .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt[3]{3})$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 \frac{x f(x)}{e^x} dx = 9$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.
- 5p c) Determinați numărul natural nenul n , pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{12}=\sqrt{3}(3-1)-2\sqrt{3}=$ $=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	3p 2p
2.	$f(1)=g(1)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$ $a=5$	3p 2p
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$ $x=0$, care convine	3p 2p
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	1p 1p 3p
5.	$m_{d_1}=a$, $m_{d_2}=\frac{1}{4}$ Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$	2p 3p
6.	$\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin x\cos x-\sin x(-\cos x)=$ $=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-3\cdot (-2)=$ $=-6+6=0$	3p 2p
b)	$M(x)-M(2018)=(I_2+xA)-(I_2+2018A)=I_2+xA-I_2-2018A=$ $=(I_2+(-2018)A)-(I_2+(-x)A)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$(I_2+mA)(I_2+nA)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$ Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow (m,n)=(1,1)$	3p 2p
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=$ $=8x\left(y+\frac{1}{8}\right)+\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$8\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{8}=1\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$ $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$	3p 2p

c)	$f(x \circ y) = 8(8xy + x + y) + 1 = 64xy + 8x + 8y + 1 = (8x + 1)(8y + 1) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y	3p
	$f(x \circ y \circ z) = f(x \circ y) \cdot f(z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$, pentru orice numere reale x , y și z	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 3) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} =$ $= \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(1 - x)(x + 3)}{(x^2 + 3)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	$f(0) = \frac{1}{3}, f'(0) = \frac{1}{3}$ Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	2p
		3p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Rightarrow f(\sqrt{2}) > f(\sqrt[3]{3})$	3p
		2p
2.a)	$\int_0^3 \frac{x f(x)}{e^x} dx = \int_0^3 \frac{x^2 e^x}{e^x} dx = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} - 0 = 9$	3p
		2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = x e^x, F''(x) = (x + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$ $F''(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1)$, $F''(-1) = 0$ și $F''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	2p
		3p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n x e^x dx = (x - 1)e^x \Big _0^n = (n - 1)e^n + 1$	3p
	$(n - 1)e^n + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 1$	2p