

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = |1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|$ este natural.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 11 - x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - 11x$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \geq g(x)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(1, 3)$ și $C(1, 5)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris $\triangle ABC$, știind că $BC = 4$, $B = \frac{\pi}{3}$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(10) = A(m^2 + m + 17)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + 5X + a$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(1) - f(-1) = 12$.
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X - 2$.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa Oy .
- 5p c) Demonstrați că $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) dx = 9$.

- 5p** **b)** Arătați că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.
- 5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^4 f^n(x) dx$. Demonstrați că $I_{n+1} \leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$ 1-\sqrt{2} = \sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2} = 2-\sqrt{2}$ $n = \sqrt{2}-1 + 2-\sqrt{2} = 1 \in \mathbb{N}$	2p 3p
2.	$11-x \geq 1-11x \Leftrightarrow 10x \geq -10$ $x \in [-1, +\infty)$	3p 2p
3.	$(3 \cdot 2)^x \cdot 2 = 72 \Leftrightarrow 6^x = 36$ $x = 2$	3p 2p
4.	Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de numere	2p 3p
5.	$AB = 4, BC = 2$ $\triangle ABC$ este dreptunghic în B , deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$	2p 3p
6.	$A = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ $R = \frac{BC}{2} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & y-2+x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \cdot e^{y-2} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & x+y-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x+y-4} \end{pmatrix} = A(x+y-2),$ pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(1+2+\dots+10-2 \cdot 9) = A(m^2+m+17) \Leftrightarrow m^2+m-20=0$ $m = -5$ sau $m = 4$	3p 2p
2.a)	$f(1) = a+2$ $f(-1) = a-10 \Rightarrow f(1) - f(-1) = a+2 - a+10 = 12$	2p 3p

b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X - 2 \Leftrightarrow f(2) = 0$ $f(2) = a + 2$, deci $a = -2$	2p 3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$ $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$, deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a = -2$, care convine	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} =$ $= -\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a) = 0$ $2 - \ln a = 0 \Leftrightarrow a = e^2$	3p 2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, e^2)$, deci f este strict crescătoare pe $(0, e^2)$ $0 < 2 < 3 < e^2 \Rightarrow f(2) < f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 < \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3 \Rightarrow \sqrt{3} \ln 2 < \sqrt{2} \ln 3$, deci $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^3 =$ $= 18 - 9 = 9$	3p 2p
b)	$\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{2-x}{4x-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(4x-x^2) \Big _1^2 =$ $= \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$	3p 2p
c)	$I_{n+1} - 4I_n = \int_0^4 f^{n+1}(x) dx - 4 \int_0^4 f^n(x) dx = \int_0^4 f^n(x) (4x - x^2 - 4) dx = - \int_0^4 f^n(x) (x-2)^2 dx$ $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, 4] \Rightarrow f^n(x) (x-2)^2 \geq 0$, deci $I_{n+1} - 4I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n	3p 2p