

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(1+i)^2 - 2i = 0$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Determinați numărul real nenul m , știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 8x - 7$ este egală cu 12.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 - 10x + 40) = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, acesta să fie număr impar.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-2, 0)$ și $C(0, 3)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Arătați că $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = \sqrt{3}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = 5$.
- 5p b) Demonstrați că $M(a)M(b) = M(a + b + 4ab)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a) = M(2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5x + 5y - xy - 20$.
- 5p a) Arătați că $x * y = -(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x \geq x$.
- 5p c) Calculați $1 * (-2) * 3 * (-4) * \dots * (-2018) * 2019$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $0 \leq (x+3)(y+3) \leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x, y \in [-3, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)dx = 4$.
- 5p b) Arătați că funcția $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^3} f(x)$, axa Ox , dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(1+i)^2 - 2i = 1 + 2i + i^2 - 2i =$ $= 1 + (-1) = 0$	3p 2p
2.	$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{8}{2m} = 12$ $m = -\frac{1}{3}$	3p 2p
3.	$x^2 - 10x + 40 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$ $x = 4$ sau $x = 6$, care convin	3p 2p
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea M sunt 50 de numere impare, deci sunt 50 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{BA} = 4\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ $BD = 2\sqrt{10}$	2p 3p
6.	$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\sin \pi + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 =$ $= 8 - 3 = 5$	3p 2p
b)	$M(a)M(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + abA \cdot A$ Cum $A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} = 4A$, obținem $M(a)M(b) = I_2 + (a + b + 4ab)A = M(a + b + 4ab)$, pentru orice numere reale a și b	2p 3p
c)	$M(a + a + 4a^2) = M(2) \Leftrightarrow 4a^2 + 2a - 2 = 0$ $a = -1$ sau $a = \frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$x * y = -xy + 5x + 5y - 25 + 5 =$ $= -x(y - 5) + 5(y - 5) + 5 = -(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$-(x - 5)^2 + 5 \geq x \Leftrightarrow (x - 5)(x - 4) \leq 0$ $x \in [4, 5]$	3p 2p

c)	$x * 5 = x$ și $5 * x = x$, pentru orice număr real x $1 * (-2) * 3 * (-4) * 5 * \dots * (-2018) * 2019 = ((1 * (-2) * 3 * (-4)) * 5) * (-6) * \dots * (-2018) * 2019 =$ $= 5 * ((-6) * \dots * (-2018) * 2019) = 5$	2p 3p
-----------	---	--

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+6)e^x - (x^2+6x+9)e^x}{(e^x)^2} =$ $= \frac{-x^2-4x-3}{e^x} = \frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x+9}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+6}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-3, -1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-3, -1]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1, +\infty)$ și, cum $f(-1) = 4e$, obținem $f(x) \leq 4e$, pentru orice $x \in [-3, +\infty)$ $0 \leq x+3 \leq 2e^{\frac{x+1}{2}}$, pentru orice $x \in [-3, +\infty)$ și $0 \leq y+3 \leq 2e^{\frac{y+1}{2}}$, pentru orice $y \in [-3, +\infty)$, deci $0 \leq (x+3)(y+3) \leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x, y \in [-3, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 (x+1) f(x) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^2 =$ $= \frac{16}{4} - 0 = 4$	3p 2p
b)	$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right)' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} + 1 - \frac{1}{x+1} =$ $= \frac{x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 - 1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1} = f(x), x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^{a^2} g(x) dx = \int_1^{a^2} \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big _1^{a^2} = \ln(a^2+1) - \ln 2$ $\ln(a^2+1) = \ln 10 \Leftrightarrow a^2 - 9 = 0$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 3$	3p 2p