

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 8 - 3i$. Arătați că $3z_1 - z_2 = 1$.
- 5p 2. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(a+1) = 35$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n(n+1) \geq 42$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4)$, $B(0,6)$ și $C(m,5)$. Determinați numărul real m , știind că $\overline{AC} = \overline{CB}$.
- 5p 6. Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC , știind că $AB = 6$ și aria triunghiului ABC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a > 0$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, pentru orice numere reale a și b , $a > 0$, $b > 0$.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 0$, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.
2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real m , știind că $f(-2) = 0$.
- 5p b) Pentru $m = 1$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Se consideră $a = \frac{x_1^2 + mx_1}{x_2x_3} + \frac{x_2^2 + mx_2}{x_1x_3} + \frac{x_3^2 + mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x(x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.
- 5p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x) dx$.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = e$ și $x = a$ are aria egală cu $2a$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3z_1 - z_2 = 3(3 - i) - (8 - 3i) =$ $= 9 - 3i - 8 + 3i = 1$	2p 3p
2.	$a - 5 + (a + 1) - 5 = 35$ $2a - 9 = 35 \Rightarrow a = 22$	2p 3p
3.	$4^x(2 - 4) + 32 = 0 \Leftrightarrow 4^x = 16$ $x = 2$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele naturale de o cifră care verifică relația sunt 6, 7, 8 și 9, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AC} = \overline{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB $m = 4$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 24 = \frac{6 \cdot AC}{2} \Rightarrow AC = 8$ $BC = 10$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} (a+1)(b+1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln((a+1)(b+1)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} (ab+a+b)+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln((ab+a+b)+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b , $a > 0, b > 0$	3p 2p
c)	$A(a)A(a) = A((a+1)^2 - 1)$, $A(a)A(a)A(a) = A((a+1)^3 - 1)$, pentru a număr real, $a > 0$ $(a+1)^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow (a+1)^3 = 8$, deci $a = 1$	2p 3p
2.a)	$f(-2) = 6m - 6$, pentru m număr real $6m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1$	3p 2p

b)	$f = X^3 + X^2 - X + 2 = (X + 2)(X^2 - X + 1)$ $x_1 = -2, x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	2p 3p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m, x_1 x_2 x_3 = -2$ $a = \frac{x_1^3 + mx_1^2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_2^3 + mx_2^2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_3^3 + mx_3^2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{mx_1 - 2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{mx_2 - 2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{mx_3 - 2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3) - 6}{x_1 x_2 x_3} =$ $= \frac{m^2 + 6}{2} \geq 3$, deci $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(x^2 + 4x + 1) + e^x(2x + 4) =$ $= e^x(x^2 + 6x + 5) = e^x(x + 5)(x + 1), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ $e^{x_0}(x_0 + 5)(x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -5$ sau $x_0 = -1$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f(-5) = \frac{6}{e^5}, f(-1) = -\frac{2}{e}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty, -5)$, pe $(-5, -1)$ și pe $(-1, +\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale $\Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{6}{e^5}\right)$	2p 3p
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{1}{\ln x}, x \in (1, +\infty)$ $F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$	2p 3p
b)	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx = \ln(\ln x) \Big _e^{e^2} =$ $= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$	3p 2p
c)	$g(x) = \ln x \Rightarrow \mathcal{A} = \int_e^a g(x) dx = \int_e^a \ln x dx = x \ln x \Big _e^a - \int_e^a x \cdot \frac{1}{x} dx = a \ln a - a$ $a \ln a - a = 2a$ și, cum $a > e$, obținem $a = e^3$	3p 2p