Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1{,}5+3\cdot(1-0{,}5)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Arătați că $f(0)-f(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-8}=1$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $2n\geq 9$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(1,2)$ și $C(4,1)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu aria egală cu 50 și $AC=5$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu 20.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -x & 2-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $3A(2)+A(6)=4A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=2A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+2x-y-1$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*2=x$.

5p **c)** Arătați că $(1-x)*x\leq 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{2}{e^x}-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(e^x-1)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numerele reale m și n, știind că dreapta d de ecuație $y=mx+n$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 (f(x)-3x)\,dx=15$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{f(x)-4x^3+3}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^3+f(x)}{x}$ este egal cu $2\pi f(3)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1,5+3\cdot(1-0,5)=1,5+3\cdot 0,5=$ $=1,5+1,5=3$	**3p** **2p**
2.	$f(0)=5$ $f(1)=4$, deci $f(0)-f(1)=5-4=1$	**2p** **3p**
3.	$3x-8=1$ $x=3$, care convine	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele n, din mulțimea A, pentru care $2n\geq 9$ sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{3}{5}$	**2p** **3p**
5.	$AC=\sqrt{10}$ $BC=\sqrt{10}$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p** **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 50=\frac{AB\cdot 5}{2}$ $AB=\frac{2\cdot 50}{5}=20$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=$ $=1+1=2$	**3p** **2p**
b)	$3A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 1\\ -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4\\ -12 & -4\end{pmatrix}=$ $=4\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}=4A(3)$	**3p** **2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2-x & 2\\ -2x & x^2-5x+4\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix}x^2-x & 2\\ -2x & x^2-5x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2\\ -2x & 4-2x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$ sau $x=3$	**2p** **3p**
2.a)	$1*1=1\cdot 1+2\cdot 1-1-1=$ $=1+2-1-1=1$	**3p** **2p**
b)	$x*2=4x-3$, pentru orice număr real x $4x-3=x$, de unde obținem $x=1$	**3p** **2p**

c)	$(1-x)*x=-x^2-2x-1+2=$	**3p**
	$=-(x+1)^2+2\le 2$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-2e^{-x}=2-\frac{2}{e^x}=$	**3p**
	$=\frac{2e^x-2}{e^x}=\frac{2\left(e^x-1\right)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{2}{e^x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{2}{xe^x}-\frac{1}{x}\right)=2$, deci $m=2$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x}-1\right)=-1$, deci $n=-1$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-3x\right)dx=\int_1^2 4x^3\,dx=x^4\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=16-1=15$	**2p**
b)	$\int_2^5\frac{1}{f(x)-4x^3+3}dx=\frac{1}{3}\int_2^5\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{3}\ln(x+1)\Big\vert_2^5=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}(\ln 6-\ln 3)=\frac{1}{3}\ln 2$	**2p**
c)	$g(x)=5x^2+3$, $x\in[1,2]$, deci $\mathcal{V}=\pi\int_1^2\left(25x^4+30x^2+9\right)dx=\pi\left(5x^5+10x^3+9x\right)\Big\vert_1^2=234\pi$	**3p**
	$f(3)=4\cdot 3^3+3\cdot 3=117$, deci $\mathcal{V}=2\pi f(3)$	**2p**