

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. Arătați că $f(3) - f(2) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1} = 2$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul $10 - n$ să fie par.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a, 0)$ și $B(a, 6)$, unde a este număr real. Arătați că $AB = 6$, pentru orice număr real a .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu $AB = 5$ și $AC = 2AB$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 25.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p b) Arătați că $A - 4I_2 = 3B$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X + X \cdot B = A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy(x + y - 4)$.
- 5p a) Arătați că $2 * 3 = 6$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $1 * x = 4$.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $2^x * 2^x = 2^{3x}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3x(x - 6)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{3f(x) - xf'(x)} = \frac{2}{3}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = 0$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 2 - e$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , $n > 2$, pentru care $\int_2^n \frac{x}{f(x) \cdot f(-x)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 + 6 \cdot \frac{5}{6} =$ $= 1 + 5 = 6$	3p 2p
2.	$f(3) = 1$ $f(2) = 0$, de unde obținem $f(3) - f(2) = 1 - 0 = 1$	2p 3p
3.	$3x + 1 = 4$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $10 - n$ este par sunt 2, 4, 6 și 8, de unde obținem 4 cazuri favorabile, deci $p = \frac{4}{9}$	2p 3p
5.	Pentru orice număr real a , $AB = \sqrt{(a-a)^2 + (6-0)^2} =$ $= \sqrt{6^2} = 6$	3p 2p
6.	$AC = 10$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 3 \cdot 3 =$ $= 7 - 9 = -2$	3p 2p
b)	$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3B$	3p 2p
c)	$X \cdot (I_2 + B) = A$ și, cum $I_2 + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $\det(I_2 + B) \neq 0$, obținem $X = A \cdot (I_2 + B)^{-1}$ $(I_2 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$2 * 3 = 2 \cdot 3(2 + 3 - 4) =$ $= 6 \cdot 1 = 6$	3p 2p

b)	$1 * x = x^2 - 3x$, pentru orice număr real x	2p
	$x^2 - 3x - 4 = 0$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 4$	3p
c)	$2^x * 2^x = 2^{2x} (2^x + 2^x - 4)$, pentru orice număr real x	2p
	$2^{2x} (2^x + 2^x - 4) = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^x + 2^x - 4 = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 4$, de unde obținem $x = 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 9 \cdot 2x =$	3p
	$= 3x^2 - 18x = 3x(x - 6), x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 6$	2p
	Pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$, pentru orice $x \in [0, 6]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, 6]$ și pentru orice $x \in [6, +\infty)$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[6, +\infty)$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{3f(x) - xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 6x + 5)}{9(1 - x^2)} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{-9(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{-3(x+1)} = \frac{2}{3}$	3p
2.a)	$\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^2 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^2 =$	3p
	$= 2 - 2 = 0$	2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x-1)e^x dx = (x-1)e^x \Big _0^1 - e^x \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 - (e - 1) = 2 - e$	2p
c)	$\int_2^n \frac{x}{f(x) \cdot f(-x)} dx = \int_2^n \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_2^n \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} dx = -\frac{1}{2} \ln x^2-1 \Big _2^n = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{n^2-1}$	3p
	$\frac{1}{2} \ln \frac{3}{n^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{8}$ și, cum n este număr natural, $n > 2$, obținem $n = 3$	2p