

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și rația $r = 2$. |
| 5p | 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$ cu axa Ox . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 2$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 4x + 4 = 0$. |
| 5p | 5. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și $AB = 2$. |
| 5p | 6. Arătați că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = 1$, pentru orice număr real x . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$. |
| 5p | b) Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b . |
| 5p | c) Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n) = A(2)$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$. |
| 5p | a) Arătați că $x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 9$. |
| 5p | c) Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n . |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x^e$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-e}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox . |
| 5p | c) Demonstrați că ecuația $e^x = x^e$ are exact o soluție în $(0, +\infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)e^x$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = 6$. |
| 5p | b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a , $a > 2$, știind că $\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)} dx = 3 \ln 2$. |

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = 4, a_3 = 6$ $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$ Abscisele sunt $x = 1$ și $x = 9$	3p 2p
3.	$5^x(5 - 3) = 2 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow 5^x = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea A este un singur număr care verifică ecuația, deci este un caz favorabil $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{10}$	1p 2p 2p
5.	$\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC $AM = \sqrt{3}$, deci lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AC}$ este egală cu $2\sqrt{3}$	3p 2p
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \sin(x + \pi) = -\sin x$ $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-6) =$ $= -10 + 12 = 2$	3p 2p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+4b & -6b \\ 2b & 1-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4a+4b+4ab & -6b-6ab-6a \\ 2a+2ab+2b & 1-3a-3b-3ab \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+4(a+b+ab) & -6(a+b+ab) \\ 2(a+b+ab) & 1-3(a+b+ab) \end{pmatrix} = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(m+n+mn) = A(2) \Leftrightarrow m+n+mn = 2$ Cum m și n sunt numere naturale, $(m+1)(n+1) = 3 \Rightarrow m = 2, n = 0$ sau $m = 0, n = 2$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 2 + 1 =$ $= 2x(y-1) - 2(y-1) + 1 = 2(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x \circ x = 2(x-1)^2 + 1$, de unde obținem $(x-1)^2 \leq 4$ $x \in [-1, 3]$	2p 3p
c)	$1 \circ x = 1$, pentru orice număr real x $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2019^n = 1 \circ (2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2019^n) = 1$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - (e \ln x)' =$ $= 1 - e \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$	2p
		3p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$ $a - e = 0 \Leftrightarrow a = e$	3p
		2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, e) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, e)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (e, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e, +\infty)$ $e^x = x^e \Leftrightarrow x = \ln x^e \Leftrightarrow f(x) = 0$ și, cum f este continuă și $f(e) = 0$, ecuația $e^x = x^e$ are exact o soluție în $(0, +\infty)$	2p
		3p
2.a)	$\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^3 (x-1)(x+1) dx = \int_0^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big _0^3 =$ $= 9 - 3 = 6$	3p
		2p
b)	$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 1) e^x dx = (x^2 - 1) e^x \Big _1^2 - \int_1^2 2x e^x dx =$ $= 3e^2 - 0 - 2(x-1)e^x \Big _1^2 = 3e^2 - 2e^2 = e^2$	2p
		3p
c)	$\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)} dx = \int_2^a \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \ln(x^2 - 1) \Big _2^a = \ln \frac{a^2 - 1}{3}$ $\ln \frac{a^2 - 1}{3} = 3 \ln 2 \Leftrightarrow a^2 - 25 = 0$ și, cum a este număr real, $a > 2$, obținem $a = 5$	3p
		2p