

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianța 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că suma elementelor mulțimii $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n-1 \leq 4\}$ este egală cu 15.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că vârful parabolei asociate funcției f are ordonata egală cu 2.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = \sqrt{9-x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați lungimea segmentului CD , unde punctul D este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Arătați că $1 + \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos 2019\pi = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = abI_3 + (a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\dots A(2019) = n!A(0)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3 - m$, unde m este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real m , știind că $f(1) = 0$.
- 5p b) Pentru $m = 3$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Determinați numărul real m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 12$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} - \ln \frac{x}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Se consideră funcțiile $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ și $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \ln \frac{x}{x+1}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{13}{3}$.
- 5p b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$, are aria egală cu $\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 f(t) dt$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n \leq 5 \Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Suma elementelor mulțimii A este $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	3p 2p
2.	$\Delta = 4 - 4m$ $\frac{4m - 4}{4} = 2$, de unde obținem $m = 3$	2p 3p
3.	$x + 3 = 9 - x \Rightarrow 2x = 6$ $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente $C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 45 + 10 + 1 = 56$	3p 2p
5.	$D(2, 2)$ $CD = 10$	2p 3p
6.	$\cos 2k\pi = 1$ și $\cos(2k + 1)\pi = -1$, unde $k \in \mathbb{Z}$ $1 + \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos 2019\pi = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) + 1 + (-1) = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 4$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} ab + a + b + 1 & 0 & 0 \\ a + b + 1 & ab & a + b + 1 \\ 0 & 0 & ab + a + b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + b + 1 & 0 & 0 \\ a + b + 1 & 0 & a + b + 1 \\ 0 & 0 & a + b + 1 \end{pmatrix} =$ $= ab \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (a + b + 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ab I_3 + (a + b + 1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(0)A(a) = (a + 1)A(0)$, pentru orice număr real a $A(0)A(1)A(2)\dots A(2019) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2020 A(0)$, de unde obținem $n = 2020$	2p 3p
2.a)	$f(1) = 6 - 2m$ $6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3$	3p 2p
b)	$f = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2)$ Rădăcinile sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$	2p 3p

c)	$x_1 + x_2 + x_3 = m$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$, deci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m^3 - 3m - 9$ $m^3 - 3m - 9 = m^3 - 12$, de unde obținem $m = 1$	3p 2p
-----------	---	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -2 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) - \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} =$ $= \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2x - (x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2}, x \in (0, +\infty)$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x+1} - \ln \frac{x}{x+1} \right) = 1 - 0 - 0 = 1$ Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1]$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $f(1) = \ln 2 > 0$, deci $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ și, cum $g(x) = h(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$, ecuația $g(x) = h(x)$ nu are soluție în $(0, +\infty)$, deci graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 4 - 0 = \frac{13}{3}$	3p 2p
b)	$g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_{-1}^1 g(x) dx = -\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2 + 4} dx + \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4} dx =$ $= -\frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big _{-1}^0 + \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big _0^1 = -\frac{1}{3} (8 - 5\sqrt{5}) + \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 8) = \frac{10\sqrt{5} - 16}{3}$	2p 3p
c)	Din teorema lui l'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x)}{4x^3} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} = \frac{1}{2}$	3p 2p