

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+4)=\log_4(6x-4)$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC=6$ și $\operatorname{tg} C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -3a & 3a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2))=5$.
- 5p** b) Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul întreg m pentru care $A(m) \cdot A(2m)=A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 4$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 3 = 1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x = 3x$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că $x \circ a = x + a$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+2x-2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2+4x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
- 5p** c) Demonstrați că $e^{x+4}(x^2+2x-2) \leq 6$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right) dx = \frac{15}{4}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.
- 5p** c) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2) = (\sqrt{6})^2 - 2^2 =$ $= 6 - 4 = 2$	3p 2p
2.	$a^2 + 1 = 1 - a$, deci $a^2 + a = 0$ $a = -1$ sau $a = 0$	3p 2p
3.	$x^2 + 4 = 6x - 4$, deci $x^2 - 6x + 8 = 0$ $x = 2$ sau $x = 4$, care convin	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 5 = 15$ numere	2p 3p
5.	$x_M = 3$ și $y_M = 0$, unde M este mijlocul segmentului AB $OM = 3$	3p 2p
6.	$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 - 2 \cdot (-6) =$ $= -7 + 12 = 5$	3p 2p
b)	$A(a) - I_2 = \begin{pmatrix} -a & a \\ -3a & 3a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a(A(1) - I_2) = a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, deci $A(a) - I_2 = a(A(1) - I_2)$, pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(m) \cdot A(2m) = A(4m^2 + 3m)$, pentru orice număr întreg m $A(4m^2 + 3m) = A(1)$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$	3p 2p
2.a)	$0 \circ 3 = 0 \cdot 3 - 0 - 3 + 4 =$ $= 0 - 3 + 4 = 1$	3p 2p
b)	$x \circ x = x^2 - 2x + 4$, pentru orice număr real x $x^2 - 2x + 4 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 4$	2p 3p
c)	$xa - x - a + 4 = x + a \Leftrightarrow xa - 2x - 2a + 4 = 0$, pentru orice număr real x $x(a - 2) - 2a + 4 = 0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x , obținem $a = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 2) + e^x(2x + 2) =$ $= e^x(x^2 + 2x - 2 + 2x + 2) = e^x(x^2 + 4x), x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x^2 + 2x - 2)}{e^x(x^2 + 4x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 + 4x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} = 1$	2p
		3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ sau } x = 0$; pentru $x \in (-\infty, -4] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -4]$ și, pentru $x \in [-4, 0] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-4, 0]$ $f(x) \leq f(-4)$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ și $f(-4) = \frac{6}{e^4}$, deci $e^{x+4}(x^2 + 2x - 2) \leq 6$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$	2p
		3p
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _1^2 =$ $= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$	3p
		2p
b)	G este o primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x^3 + \frac{3}{x}\right), x \in (0, +\infty)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \left(x^3 + \frac{3}{x}\right) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția G este crescătoare	2p
		3p
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^4 + 3} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^2)'}{(x^2)^2 + 3} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}} \Big _1^{\sqrt{3}} =$ $= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$	3p
		2p