

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**Varianta 6**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $\sqrt{3}(2\sqrt{3}+1)-\sqrt{3}=6$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 2$ . Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $f(a) = 2$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x-1} = 3$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 10%, un obiect costă 180 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4,1)$ ,  $B(-4,1)$  și  $C(0,4)$ . Determinați lungimea înălțimii din vârful  $C$  în triunghiul  $ABC$ .
- 5p 6. Arătați că  $\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 2$ .
- 5p b) Arătați că  $3A - A \cdot A = 2I_2$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(xA - I_2)(xA - I_2) = 5A - I_2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x^2 + (x+1)(y+1) + y^2$ .
- 5p a) Arătați că  $3 \circ (-1) = 10$ .
- 5p b) Demonstrați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă.
- 5p c) Demonstrați că  $x \circ 1 \geq 2$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)\ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x=1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(0,1]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 (x^2+1)f(x) dx = -\frac{1}{6}$ .
- 5p b) Determinați primitiva  $F$  a funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 0$ .
- 5p c) Arătați că  $\int_1^2 \left( f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \ln \frac{5}{2}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_tehnologic***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 6**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\sqrt{3}(2\sqrt{3}+1) - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} =$ $= 2 \cdot 3 = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$a^2 - 4a + 2 = 2 \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0$ $a = 0$ sau $a = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$x - 1 = 9$ $x = 10$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	$x - \frac{10}{100} \cdot x = 180$ , unde $x$ este prețul inițial al obiectului $x = 200$ de lei	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5.</b>	$AB = BC \Rightarrow CD$ este înălțime în $\triangle ABC$ , unde $D(0,1)$ este mijlocul segmentului $AB$ $CD = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0 =$ $= 2 - 0 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $3A - A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I_2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$xA - I_2 = \begin{pmatrix} x-1 & 3x \\ 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$ , $(xA - I_2)(xA - I_2) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 & 9x^2 - 6x \\ 0 & (2x-1)^2 \end{pmatrix}$ , $5A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ Cum $(x-1)^2 = 4$ , $9x^2 - 6x = 15$ și $(2x-1)^2 = 9$ , obținem $x = -1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$3 \circ (-1) = 3^2 + (3+1)(-1+1) + (-1)^2 =$ $= 9 + 4 \cdot 0 + 1 = 10$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x \circ y = x^2 + (x+1)(y+1) + y^2 =$ $= y^2 + (y+1)(x+1) + x^2 = y \circ x$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ , deci legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>c)</b>	$x \circ 1 = x^2 + 2(x+1) + 1^2 = x^2 + 2x + 1 + 2 =$	<b>3p</b>
	$= (x+1)^2 + 2 \geq 2$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)' =$	<b>3p</b>
	$= \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \ln x, x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f(1) = 0, f'(1) = 0$	<b>2p</b>
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ , adică $y = 0$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$x \in (0, 1] \Rightarrow \ln x \leq 0$ și $1 - \frac{1}{x} \leq 0$	<b>3p</b>
	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice număr real $x \in (0, 1]$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1 + x - 2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{6}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left( 1 + \frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \left( t + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - 2 \arctg t \right) \Big _0^x =$	<b>3p</b>
	$= x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctg x, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x}{x^2+1}$ , pentru orice număr real $x, x \neq 0$	<b>2p</b>
	$\int_1^2 \left( f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) \Big _1^2 = \ln \frac{5}{2}$	<b>3p</b>