

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_{șt-nat}

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 2$ și rația $r = 3$. Calculați a_3 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2) = 9$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2} - 3^{2x} = 8$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.
- 5p 5. Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.
- 5p 6. Arătați că $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 36$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X \cdot X = A(0)$. Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 1 = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $x \circ a = x$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x^6 = 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x}$.
- 5p c) Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2) f(x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right) dx = \frac{1}{2} \ln 5$.
- 5p c) Arătați că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right) \ln x dx = \frac{e^2 + 5}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2 \cdot 3 = 8$	3p 2p
2.	$2x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x = -2$ sau $x = 2$	3p 2p
3.	$3^{2x}(3^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 3^{2x} = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Divizorii din mulțimea A ai numărului 100 sunt 1, 2, 4 și 5, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{9}$	2p 2p 1p
5.	$ABCD$ este paralelogram și pentru $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})$ $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD})$, deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$	3p 2p
6.	$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 36 - 0 = 36$	3p 2p
b)	$A(a) - (12 + a)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) - (12 + a)I_2) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{vmatrix} = -a(1 + a)$ $a(1 + a) = 0$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = -1$	3p 2p
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deci $X \cdot X = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Din $b(a + d) = 0$ și $c(a + d) = 1$, rezultă $a + d \neq 0$ și $b = 0$ și, cum $d^2 + bc = 3$, obținem $d^2 = 3$, deci d este număr irațional	2p 3p
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + \sqrt[3]{1} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$	3p 2p
b)	$x + \sqrt[3]{a} - 2 = x$, pentru orice număr real x $\sqrt[3]{a} = 2 \Leftrightarrow a = 8$	2p 3p

c)	$x + \sqrt[3]{x^6} - 2 = 4$, deci $x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ sau $x = 2$	3p 2p
----	--	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^2)' - (2\sqrt{x^2-1})' = 2x - 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} =$ $= 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right), \quad x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} =$ $= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2$	3p 2p
c)	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^4 = 4(x^2-1) \Leftrightarrow (x^2-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ și, cum $x > 1$, obținem $x = \sqrt{2}$ $A(\sqrt{2}, 0)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox și, cum panta tangentei la graficul funcției f în punctul A este $f'(\sqrt{2}) = 0$, obținem că axa Ox este tangentă la graficul funcției f	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 2x + 2) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x + 2) \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
b)	$\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \int_0^2 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx =$ $= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) \Big _0^2 = \frac{1}{2} \ln 5$	2p 3p
c)	$\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2 \right) \ln x dx = \int_1^e \left(x + \frac{2}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + 2 \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx + 2 \int_1^e (\ln x)' \ln x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln^2 x \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e + \ln^2 e - \ln^2 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2 + 5}{4}$	3p 2p