

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$ este natural, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $f(x) + f(1-x) = 7$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A , care îl conțin pe 1.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM .
- 5p** 6. Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sin B = \cos B$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $A = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2020 = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1)} + 1$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** c) Determinați $x \in A$ pentru care $x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = 1 - (i\sqrt{2})^2 = 1 - 2i^2 = 1 - 2(-1) =$ $= 1 + 2 = 3$, care este număr natural	3p 2p
2.	$f(x) + f(1-x) = 3x + a + 3(1-x) + a = 2a + 3$, pentru orice număr real x $2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2$	3p 2p
3.	$5^x + 5^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (5^x - 1)^2 = 0$ $5^x = 1$, deci $x = 0$	3p 2p
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A , care îl conțin pe 1, este egal cu numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{2, 3, 4, 5\}$, deci este egal cu $C_4^2 =$ $= \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	3p 2p
5.	$m_{OM} = -1$ și, cum $m_{OM} \cdot m_d = -1$, obținem $m_d = 1$ Ecuația dreptei d este $y - y_M = m_d(x - x_M)$, deci $y = x + 8$	2p 3p
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC}$ $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 4 + 3 - 4 - 0 - 4 = -1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = -(a^2 - a + 1)$, pentru orice număr real a $a^2 - a + 1 \neq 0$, pentru orice număr real $a \Rightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	Cum $a \in \mathbb{Z}$, inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(a))$ este divizor al lui 1 și, cum $\det(A(a)) < 0$, pentru orice număr real a , obținem că $\det(A(a)) = -1$ $a = 0$ sau $a = 1$, care convin	3p 2p
2.a)	$1 * 2020 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{1^3 \cdot 2020^3 - 1^3 - 2020^3 + 9} =$ $= \frac{1}{2} \sqrt[3]{-1 + 9} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{8} = 1$	3p 2p

b)	$x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 1 + 8} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 (y^3 - 1) - (y^3 - 1) + 8} =$ $= \sqrt[3]{\frac{1}{8} (x^3 - 1) (y^3 - 1) + \frac{1}{8} \cdot 8} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} (x^3 - 1) (y^3 - 1) + 1}, \text{ pentru orice } x, y \in A$	3p 2p
c)	$x * x = \sqrt[3]{\frac{1}{8} (x^3 - 1)^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in A, \text{ deci } \frac{1}{8} (x^3 - 1)^2 + 1 = x^3$ $(x^3 - 1)^2 = 8(x^3 - 1), \text{ deci } x^3 - 1 = 0 \text{ sau } x^3 - 1 = 8, \text{ de unde } x = 1 \text{ sau } x = \sqrt[3]{9}, \text{ care convin}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{-x(x-1) + (x-2)^2}{x(x-1)(x-2)^2} =$ $= \frac{-x^2 + x + x^2 - 4x + 4}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-3x + 4}{x(x-1)(x-2)^2}, x \in (2, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} + \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$x \in (2, +\infty) \Rightarrow f'(x) < 0, \text{ deci } f \text{ strict descrescătoare pe } (2, +\infty) \text{ și, cum } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$ obținem că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$ $\frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x} > 0, \text{ deci } \frac{1}{x-2} > -\ln \frac{x-1}{x}, \text{ de unde obținem că } \frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}, \text{ pentru orice } x \in (2, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x^3 + 1) f^2(x) dx = \int_0^1 (x^3 + 1) \left(\frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}} \right)^2 dx = \int_0^1 x^2 dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx =$ $= \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \Big _0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 f(x^n) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n} + 1}} dx \text{ și, cum } 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^{3n} + 1}} \leq x^n, \text{ pentru } x \in [0, 1] \text{ și, pentru fiecare}$ număr natural nenul n, obținem că $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}, \text{ pentru fiecare număr natural nenul } n \text{ și, cum } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ obținem}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p 2p