

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = (3 - i\sqrt{2})(3 + i\sqrt{2})$ este întreg, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 3)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2019^x + 2019^{-x} = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -3)$ și $B(2, -2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB .
- 5p 6. Arătați că $\sin(a - b)\sin(a + b) = (\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$, pentru orice numere reale a și b .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(a)) = 0$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = 2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Demonstrați că matricea $B = A(\log_2 3) \cdot A(\log_3 4) \cdot A(\log_4 5) \cdot \dots \cdot A(\log_{15} 16)$ are toate elementele numere întregi.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + n$, unde m și n sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $f(-1) - 2f(0) + f(1) = 2$, pentru orice numere reale m și n .
- 5p b) Determinați numerele reale m și n , știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 - 1$.
- 5p c) Demonstrați că $3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 1$, pentru orice numere reale m și n , unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, 4e^{-2})$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = \frac{7}{3}$.

- 5p** | **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = 2x - x^2 + f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria egală cu e^2 .
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{e^{-1}}^1 x^n (f(x) - x^2) dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n = 3^2 - (i\sqrt{2})^2 =$ $= 9 - 2i^2 = 11 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
2.	$f(a) = 3 \Rightarrow 2a + a = 3$ $a = 1$	3p 2p
3.	$2019^x + 2019^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (2019^x - 1)^2 = 0$ $2019^x = 1$, deci $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităților impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = 1$ Ecuația dreptei d este $y - y_A = m_d(x - x_A)$, deci $y = x - 6$	2p 3p
6.	$\sin(a - b)\sin(a + b) = \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 b \cdot \cos^2 a =$ $= \sin^2 a(1 - \sin^2 b) - \sin^2 b(1 - \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b = (\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$, pentru orice numere reale a și b	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} =$ $= 2a^2 + 0 + 0 - 2a^2 - 0 - 0 = 0$, pentru orice număr real a	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & -2ab \\ 0 & 4 & 0 \\ -2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} ab & 0 & -ab \\ 0 & 2 & 0 \\ -ab & 0 & ab \end{pmatrix} = 2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$B = 2^{13} A(\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{15} 16) = 2^{13} A(\log_2 16) =$ $= 2^{13} A(4)$, care are toate elementele numere întregi	3p 2p

2.a)	$f(-1) = -m + n, f(0) = n$	2p
	$f(1) = 2 + m + n \Rightarrow f(-1) - 2f(0) + f(1) = -m + n - 2n + 2 + m + n = 2$, pentru orice numere reale m și n	3p
b)	f este divizibil cu $X^2 - 1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$ și $f(1) = 0$	3p
	$m = -1, n = -1$	2p
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -1, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m, x_1x_2x_3 = -n, x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1 + 3m - 3n$	3p
	$3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 3(m - n) - (-1 + 3m - 3n) = 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} =$	3p
	$= (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 2$	2p
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0, 2]$, deci f este crescătoare pe $[0, 2]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, deci f este descrescătoare pe $[2, +\infty)$	3p
c)	$f(0) = 0 < a, f(2) = 4e^{-2} > a$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 < a$, pentru orice $a \in (0, 4e^{-2})$	3p
	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty, 0)$, pe $(0, 2)$ și pe $(2, +\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale	2p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^2 =$	3p
	$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	2p
b)	$g(x) = 2x + \ln x \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (2x + \ln x) dx = x^2 \Big _1^e + x \ln x \Big _1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$	3p
	$= e^2 - 1 + e - 0 - (e - 1) = e^2$	2p
c)	$\int_{e^{-1}}^1 x^n (f(x) - x^2) dx = \int_{e^{-1}}^1 x^n \ln x dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right) \Big _{e^{-1}}^1 = \frac{1}{(n+1)e^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2 e^{n+1}}$	3p
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{e^{-1}}^1 x^n (f(x) - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2 e^{n+1}} \right) = 0$	2p