

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Varianta 5

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 + 0,5) = \frac{3}{4}$ .
- 5p 2. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 5$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1 - 3x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x + 5) = \log_3 9$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 30%, prețul unui obiect este 700 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,6)$  și  $B(8,0)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $O$  în triunghiul  $AOB$ .
- 5p 6. Arătați că  $\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ - (\sin 30^\circ + \cos 60^\circ) = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A = 5$ .
- 5p b) Arătați că, dacă  $A + B(x) = 3I_2$ , atunci  $A \cdot B(x) = 5I_2$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $\det(B(x) \cdot B(x) - I_2) = 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - 9(x + y) + 90$ .
- 5p a) Arătați că  $10 \circ 8 = 8$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = (x - 9)(y - 9) + 9$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $n \circ n \leq 10$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $-1 \leq f(x) + f(y) \leq \frac{1}{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^x} + x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 \left(f(x) - \frac{1}{e^x}\right) dx = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este concavă pe intervalul  $(-\infty, 0]$ .
- 5p c) Calculați  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .

**Examenul de bacalaureat național 2018**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_tehnologic***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Variantă 5**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.</b> | $\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 + 0,5) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{10}\right) =$<br>$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$                                                                                                                              | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.</b> | $3x - 5 = 1 - 3x$<br>$x = 1$                                                                                                                                                                                                                                                | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>3.</b> | $x + 5 = 9$<br>$x = 4$ , care convine                                                                                                                                                                                                                                       | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>4.</b> | $x - \frac{30}{100} \cdot x = 700$ , unde $x$ este prețul obiectului înainte de ieftinire<br>$x = 1000$ de lei                                                                                                                                                              | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>5.</b> | Triunghiul $AOB$ este dreptunghic în $O$ , $AB = 10$<br>Lungimea medianei din $O$ este egală cu $\frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$                                                                                                                                           | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>6.</b> | $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$<br>$\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ - (\sin 30^\circ + \cos 60^\circ) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} - 1 = 0$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 =$<br>$= 2 + 3 = 5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3+x \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -3$<br>$A \cdot B(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $B(x) \cdot B(x) - I_2 = \begin{pmatrix} 4+x & 3x \\ 3 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+x & 3x \\ 3 & x \end{pmatrix}$<br>$\begin{vmatrix} 3+x & 3x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x = 6$                                                                                                                                                 | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $10 \circ 8 = 10 \cdot 8 - 9(10 + 8) + 90 =$<br>$= 80 - 162 + 90 = 8$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $x \circ y = xy - 9x - 9y + 81 + 9 =$<br>$= x(y - 9) - 9(y - 9) + 9 = (x - 9)(y - 9) + 9$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

|           |                                                                                                                                |                        |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>c)</b> | $(n-9)^2 + 9 \leq 10 \Leftrightarrow (n-10)(n-8) \leq 0$<br>Cum $n$ este număr natural, obținem $n = 8$ , $n = 9$ sau $n = 10$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                        |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 3) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} =$ $= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(3-x)(x+1)}{(x^2 + 3)^2}, x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = 0$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = 0</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | <p><math>f'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe <math>(-\infty, -1]</math>, <math>f'(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in [-1, 3] \Rightarrow f</math> este crescătoare pe <math>[-1, 3]</math> și <math>f'(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in [3, +\infty) \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe <math>[3, +\infty)</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0</math>, <math>f(-1) = -\frac{1}{2}</math>, <math>f(3) = \frac{1}{6}</math> și <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0</math>, deci <math>-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}</math> și <math>-\frac{1}{2} \leq f(y) \leq \frac{1}{6}</math>,</p> <p>de unde obținem <math>-1 \leq f(x) + f(y) \leq \frac{1}{3}</math>, pentru orice numere reale <math>x</math> și <math>y</math></p> | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_{-1}^1 \left( f(x) - \frac{1}{e^x} \right) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | <p><math>F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> este o primitivă a lui <math>f \Rightarrow F'(x) = f(x)</math>, <math>F''(x) = -\frac{1}{e^x} + 1</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>F''(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 0]</math>, deci funcția <math>F</math> este concavă pe intervalul <math>(-\infty, 0]</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 (1 + xe^x) dx = \left( x + (x-1)e^x \right) \Big _0^1 =$ $= 1 + 0 - 0 - (-1) \cdot e^0 = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>3p</b><br><b>2p</b> |