

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $1 + i + (i - 1)(1 + i) - (i - 1) = 0$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Calculați $(f \circ f)(1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 5x + 7) = \log_2 3$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$ și $D(8,5)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Arătați că $\sin x + 3\cos x = 2\sqrt{2}$, știind că $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(X(1)) = -4$.
- 5p b) Demonstrați că $X(-a) + X(a) = X(-2018) + X(2018)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Determinați perechile de numere reale (a, b) pentru care $X(a)X(b) = X(a) + X(b)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - X + m$, unde m este număr real.
- 5p a) Pentru $m = 2$, arătați că $f(2) = 0$.
- 5p b) Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X + 1$, atunci polinomul f se divide cu $X^2 - 3X + 2$.
- 5p c) Determinați numărul real nenul m , știind că $\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_3 x_1} + \frac{x_3}{x_1 x_2} = 6$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 1 + \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = 11$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3e^2 + 4e - 4}{2}$.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = a$ are aria egală cu $a^3 + a^2 + a - 2$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=1+i+(i^2-1)-i+1=$ $=1+i-2-i+1=0$	3p 2p
2.	$f(1)=0$ $f(f(1))=f(0)=1$	2p 3p
3.	$x^2-5x+7=3 \Rightarrow x^2-5x+4=0$ $x=1$ sau $x=4$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale pare de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$	1p 2p 2p
5.	$x_A + x_C = 6$, $x_B + x_D = 6 \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$ $y_A + y_C = 6$, $y_B + y_D = 6 \Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow$ segmentele AC și BD au același mijloc, deci $ABCD$ este paralelogram	2p 3p
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg} x = 1$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$ $\sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$X(1) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 =$ $= 1 - 5 = -4$	3p 2p
b)	$X(-a) + X(a) = \begin{pmatrix} -a & 5 \\ 1 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 5 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} -2018 & 5 \\ 1 & -2018 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2018 & 5 \\ 1 & 2018 \end{pmatrix} = X(-2018) + X(2018)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} ab+5 & 5(a+b) \\ a+b & ab+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 10 \\ 2 & a+b \end{pmatrix}$ Cum $a+b=2$ și $ab=-3$, obținem perechile $(-1, 3)$ și $(3, -1)$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 - 2X^2 - X + 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 =$ $= 8 - 8 - 2 + 2 = 0$	3p 2p
b)	$f(-1) = 0 \Rightarrow m = 2$, deci $f = X^3 - 2X^2 - X + 2$ Restul împărțirii lui f la $X^2 - 3X + 2$ este 0, deci f se divide cu $X^2 - 3X + 2$	3p 2p

c)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1, x_1x_2x_3 = -m$	3p
	$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1x_2x_3} = 6 \Leftrightarrow \frac{6}{-m} = 6, \text{ deci } m = -1$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} + \frac{1 \cdot (x+2) - (x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} + \frac{1 \cdot (x+3) - (x+2) \cdot 1}{(x+3)^2} =$	3p
	$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} + \frac{x+3-x-2}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, x \in (-1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} \right) = 3$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 3$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1, +\infty)$	2p
	f este continuă pe $(-1, +\infty)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, deci $\text{Im } f = (-\infty, 3)$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) dx = \left(x^3 + x^2 + x \right) \Big _1^2 =$	3p
	$= (8 + 4 + 2) - (1 + 1 + 1) = 11$	2p
b)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \left(3x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 2x + \ln x \right) \Big _1^e + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$	3p
	$= \frac{3e^2 + 4e - 5}{2} + \frac{1}{2} \ln^2 x \Big _1^e = \frac{3e^2 + 4e - 4}{2}$	2p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^a f(x) dx = \int_1^a (3x^2 + 2x + 1 + \ln x) dx = \left(x^3 + x^2 + x \right) \Big _1^a + (x \ln x - x) \Big _1^a = a^3 + a^2 + a \ln a - 2$	3p
	$a^3 + a^2 + a \ln a - 2 = a^3 + a^2 + a - 2 \Rightarrow \ln a = 1, \text{ deci } a = e$	2p