

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $3(4-i) + 3i(1+i) = 9$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. Calculați $(f \circ f)(2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 2x + 4) = 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctele O , A și B sunt coliniare.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1,1)) = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x| \neq |y|$.
- 5p** c) Determinați perechile (m,n) , de numere întregi, pentru care $A(m,n) \cdot A(-m,n) = I_2$.
2. Pe mulțimea $A = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 4^{xy} - (1 - x - y)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 0 = 2$.
- 5p** b) Arătați că $x \circ \frac{1}{x} \geq 5$, pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m \circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x^3 \geq 3 \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + e^x) dx = \frac{e^2 + 1}{e}$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x) dx \geq -\frac{2a}{e}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3(4-i) + 3i(1+i) = 12 - 3i + 3i + 3i^2 =$ $= 12 - 3 = 9$	3p 2p
2.	$f(2) = 0$ $f(f(2)) = f(0) = -4$	2p 3p
3.	$x^2 - 2x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$m_{OA} = 2$, $m_{OB} = \frac{a}{3}$, unde a este număr real $m_{OA} = m_{OB} \Leftrightarrow a = 6$	2p 3p
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{4} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1)) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$ $= -8 - (-8) = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(x,y)) = \begin{vmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{vmatrix} = x^2 - y^2$, pentru orice numere reale x și y $A(x,y)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x,y)) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \neq 0$, deci $ x \neq y $	2p 3p
c)	$A(m,n) \cdot A(-m,n) = \begin{pmatrix} m+3n & 4n \\ -2n & m-3n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m+3n & 4n \\ -2n & -m-3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2 - m^2 & 0 \\ 0 & n^2 - m^2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere întregi m și n $\begin{pmatrix} n^2 - m^2 & 0 \\ 0 & n^2 - m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(0,1)$ sau $(0,-1)$	3p 2p

2.a)	$2 \circ 0 = 4^{2 \cdot 0} - (1 - 2 - 0) =$ $= 1 - 1 + 2 = 2$	3p 2p
b)	$x \circ \frac{1}{x} = 4^{x \cdot \frac{1}{x}} - 1 + x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + 3 = x + \frac{1}{x} - 2 + 5 =$ $= \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} + 5 = \frac{(x-1)^2}{x} + 5 \geq 5$, pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$	2p 3p
c)	m și n sunt numere naturale impare, deci $m \geq 1$ și $n \geq 1 \Rightarrow mn \geq 1$, de unde obținem că 4^{mn} este număr natural par m și n sunt numere naturale impare, deci $m+n-1$ este număr natural impar, de unde obținem că $m \circ n = 4^{mn} + m + n - 1$ este număr natural impar	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} =$ $= \frac{3(x^3 - 1)}{x} = \frac{3(x-1)(x^2 + x + 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru $x \in (0, 1]$, obținem $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și pentru $x \in [1, +\infty)$, obținem $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ și, cum $f(1) = 1$, obținem că $x^3 \geq 3 \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$ $= 2 - 0 = 2$	3p 2p
b)	$\int_{-1}^1 (f(x) + e^x) dx = \int_{-1}^1 (xe^x + e^x) dx = \int_{-1}^1 (xe^x)' dx = xe^x \Big _{-1}^1 =$ $= e + e^{-1} = \frac{e^2 + 1}{e}$	3p 2p
c)	$f'(x) = (x+1)e^x$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ și, cum $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$, obținem că $f(x) \geq f(-1)$, pentru orice număr real x $f(-1) = -\frac{1}{e}$, deci $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x) dx \geq -\frac{1}{e} \int_{-1-a}^{-1+a} dx = -\frac{1}{e} x \Big _{-1-a}^{-1+a} = -\frac{2a}{e}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	2p 3p