Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(0{,}3+0{,}4)\cdot 10+2\cdot 0{,}5=8$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Arătați că $f(1)+f(2)=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+1)=\log_5 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{11,21,31,41,51,61,71,81,91\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(m,2)$ și $C(5,3)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=20$ și $AC=16$. Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(5)=2A(3)$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot A(1)=A(3)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X-5$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-5$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că 1 este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul natural m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=e$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\displaystyle\int_1^a \frac{2xf\left(x^2\right)}{x^2+1}dx=e\left(e^3-1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,3+0,4)\cdot 10+2\cdot 0,5=0,7\cdot 10+1=$	**3p**
	$=7+1=8$	**2p**
2.	$f(1)=1$	**2p**
	$f(2)=3$, de unde obținem $f(1)+f(2)=4$	**3p**
3.	$2x+1=5$, de unde obținem $2x=4$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele, din mulțimea A, care sunt divizibile cu 3 sunt 21, 51 și 81, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**3p**
5.	$m=\frac{3+5}{2}=$	**3p**
	$=4$	**2p**
6.	$AB=12$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=48$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-1\cdot 1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
b)	$A(1)+A(5)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(3)$	**2p**
c)	Inversa matricei $A(1)$ este matricea $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+m\cdot 0^2+2\cdot 0-5=$	**3p**
	$=0+0+0-5=-5$, pentru orice număr real m	**2p**

b)	$f(1)=0 \Rightarrow 1^3+m\cdot 1^2+2\cdot 1-5=0$	**3p**
	$m-2=0$, de unde obținem $m=2$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=m^2-4$, deci $m^2-4=5$ și, cum m este număr natural, obținem $m=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$;	**3p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx=e^x(x+1)\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e^x(x+1)\Big\vert_0^1-e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-e+1=e$	**2p**
c)	$\int_1^a \dfrac{2xf(x^2)}{x^2+1}dx=\int_1^a 2xe^{x^2}dx=\int_1^a e^{x^2}(x^2)'dx=e^{x^2}\Big\vert_1^a=e^{a^2}-e$	**3p**
	$e^{a^2}-e=e(e^3-1)\Rightarrow e^{a^2}=e^4$ și, cum $a>1$, obținem $a=2$	**2p**