

**Examenul național de bacalaureat 2024**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $2 - 5i + i(5 - 3i) = 5$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(2) = 15$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{2x+1} = 7^x \cdot 7^2$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin una dintre cifre egală cu 1.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,5)$  și  $B(4,2)$ . Determinați distanța dintre punctul  $A$  și mijlocul segmentului  $OB$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 5$  și  $BC = 5\sqrt{5}$ . Arătați că  $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x & x-3 \\ 3-x & x-4 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = 1$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $B(4) \cdot B(4) + I_2 = aB(4)$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x + y)(4 - x - y)$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 3 = 3$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * 1 = 0$ .
- 5p** c) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care numărul  $N = (n + 5) * (n - 5)$  este natural.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x - 2 \ln(x + 1)$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 0$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Arătați că  $x^2 - x \geq 2 \ln \frac{x + 1}{2}$ , pentru orice  $x \in (-1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^3 (f(x) - 3x) dx = 12$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^2)^2} dx = \frac{1}{4}$ .
- 5p** c) Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x) - x^2 - 1}{e^x}$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$  este egală cu  $3 \left(1 - \frac{2}{e}\right)$ .

**Examenul național de bacalaureat 2024**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$2 - 5i + i(5 - 3i) = 2 - 5i + 5i - 3i^2 =$ $= 2 + 3 = 5$	3p 2p
2.	$f(2) = 12 + m$ , deci $12 + m = 15$ $m = 3$	3p 2p
3.	$7^{2x+1} = 7^{x+2}$ , de unde obținem $2x+1 = x+2$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 18 numere care au cel puțin una dintre cifre egală cu 1, deci sunt 18 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$	2p 3p
5.	$M(2,1)$ este mijlocul segmentului $OB$ $AM = 4$	3p 2p
6.	$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{5}} =$ $= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$B(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , $B(4) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ $B(4) \cdot B(4) + I_2 = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 4B(4)$ , deci $4B(4) = aB(4)$ , de unde obținem $a = 4$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 3x-3 & x-2 \\ x & x-3 \end{pmatrix}$ , $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 3x-3 & -x \\ -x+2 & x-3 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$ Cum $\begin{pmatrix} 3x-3 & x-2 \\ x & x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-3 & -x \\ -x+2 & x-3 \end{pmatrix}$ , obținem $x = 1$	3p 2p
2.a)	$0 * 3 = (0+3)(4-0-3) =$ $= 3 \cdot 1 = 3$	3p 2p
b)	$x * 1 = (x+1)(3-x)$ , pentru orice număr real $x$ $(x+1)(3-x) = 0$ , de unde obținem $x = -1$ sau $x = 3$	2p 3p

<b>c)</b>	$(n+5)*(n-5)=4n(2-n)$ , pentru orice număr natural $n$ Cum $n$ și $N=4n(2-n)$ sunt numere naturale, obținem $n=0$ , $n=1$ și $n=2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
-----------	---	------------------------

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x+1} =$ $= \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - 2}{x+1} = \frac{2x^2 + x - 3}{x+1}$ , $x \in (-1, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f(0) = 0$ , $f'(0) = -3$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = -3x$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ; pentru orice $x \in (-1, 1]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(-1, 1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$ Pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ , $f(x) \geq f(1)$ și, cum $f(1) = -2\ln 2$ , obținem $x^2 - x \geq 2\ln \frac{x+1}{2}$ , pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^3 (f(x) - 3x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(3x+1)'}{(3x+1)^2} dx = -\frac{1}{3(3x+1)} \Big _0^1 =$ $= -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$g(x) = 3xe^{-x}$ , $x \in \mathbb{R}$ , deci $\mathcal{A} = \int_0^1  g(x)  dx = \int_0^1 3x(-e^{-x})' dx =$ $= -3e^{-x}(x+1) \Big _0^1 = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$	<b>2p</b> <b>3p</b>