Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2=14$ și $a_3=18$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Arătați că $(f\circ f)(5)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2+2x+1}=\sqrt[3]{1-x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,7,9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,1)$. Determinați coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OA}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=12$ și $AB=\frac{BC}{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&x\\0&x&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=xyA$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=xA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+X+2-a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $(x_1-x_1^2)(x_2-x_2^2)(x_3-x_3^2)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2e^{2x}(x^2+x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+6x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-6x^2\right)dx=\frac{12}{5}$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 6}{2}$.
5p	**c)** Arătați că $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \left(f(2t)-f(t)\right)dt\right)=6$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 14=\frac{a_1+18}{2}$	**3p**
	$a_1=10$	**2p**
2.	$f(5)=7$	**2p**
	$(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(7)=9$	**3p**
3.	$x^2+2x+1=1-x$, de unde obținem $x^2+3x=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=0$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=(x_B-2)\vec{i}+(y_B-1)\vec{j}$, unde $B(x_B,y_B)$	**3p**
	$(x_B-2)\vec{i}+(y_B-1)\vec{j}=4\vec{i}+2\vec{j}$, de unde obținem $x_B=6$ și $y_B=3$	**2p**
6.	$AB=6$, $AC=6\sqrt{3}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-2-0=0$	**3p**
b)	$B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1+xy&y+x\\0&x+y&xy+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1&x+y\\0&x+y&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&xy&0\\0&0&xy\end{pmatrix}=xyA$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B(x)\cdot B(x+1)=B(2x+1)+(x^2+x)A$, $B(2x)\cdot B(1)=B(2x+1)+2xA$, de unde obținem $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=(x^2-x)A$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x^2-x)A=xA$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+1+2-a=$	**3p**
	$=1+a+1+2-a=4$, pentru orice număr real a	**2p**

b)	$f=X^3+2X^2+X=X\left(X^2+2X+1\right)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului sunt $x_1=x_2=-1$ și $x_3=0$	**3p**
c)	$x_1x_2x_3=-2+a$, $\left(x_1-x_1^2\right)\left(x_2-x_2^2\right)\left(x_3-x_3^2\right)=x_1x_2x_3\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1-x_3\right)=\left(-2+a\right)f\left(1\right)$	**3p**
	$4\left(-2+a\right)=4$, de unde obținem $a=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2-2\right)'e^{2x}+\left(x^2-2\right)\left(e^{2x}\right)'=$	**2p**
	$=2xe^{2x}+\left(x^2-2\right)\cdot 2e^{2x}=2e^{2x}\left(x^2+x-2\right),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{2\left(x^2+x-2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{2x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x^2}}{2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=1$; pentru orice $x\in\left(-\infty,-2\right]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left(-\infty,-2\right]$; pentru orice $x\in\left[-2,1\right]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left[-2,1\right]$ și pentru orice $x\in\left[1,+\infty\right)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[1,+\infty\right)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(1)=-e^2$ și f este continuă, imaginea funcției f este $\left[-e^2,+\infty\right)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-6x^2\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4+1\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^5}{5}+x\right)\right\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{5}+1+\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{12}{5}$	**2p**
b)	$\int\limits_{1}^{6}\dfrac{x^3}{f(x)-1}dx=\int\limits_{1}^{6}\dfrac{x}{x^2+6}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{6}\dfrac{\left(x^2+6\right)'}{x^2+6}dx=\left.\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+6\right)\right\|_{1}^{6}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln 42}{2}-\dfrac{\ln 7}{2}=\dfrac{\ln 6}{2}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}\int\limits_{0}^{x}\left(f(2t)-f(t)\right)dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int\limits_{0}^{x}\left(f(2t)-f(t)\right)dt\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{3x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x^4+18x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2+6\right)=6$	**2p**