

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(1,5 - 0,5) \cdot 3 - 2 \cdot 0,5 = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 9$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x - 1) = \log_4 5$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $5n \leq 22$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 1)$ și $B(6, 3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = 4$ și $BC = 5$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 6.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = 5$.
- 5p b) Arătați că $2A - B(2) = 2B(0)$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(x) \cdot B(1) - (x+1)A) = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 6xy$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 1 = -4$.
- 5p b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Determinați numerele întregi m pentru care $m \circ (3 - m) < 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^4 + 2$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 6x^2(1 - 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x^4}{x^3 + 4} = 2$.
- 5p c) Demonstrați că $-32 \leq 2x^3 - 3x^4 \leq \frac{1}{16}$, pentru orice $x \in [0, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_2^3 (f(x) - 3e^x) dx = 5$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 x(f(x) - 2x) dx = 3$.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că $\int_0^1 \frac{f'(x) - x}{2f(x) - x^2} dx = a \ln\left(e + \frac{1}{2}\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(1,5 - 0,5) \cdot 3 - 2 \cdot 0,5 = 1 \cdot 3 - 1 =$ $= 3 - 1 = 2$	3p 2p
2.	$f(a) = 2a - 3$ $2a - 3 = 9$, de unde obținem $a = 6$	2p 3p
3.	$3x - 1 = 5$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care $5n \leq 22$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 3p
5.	$x_M = \frac{-2+6}{2}$, $y_M = \frac{1+3}{2}$, unde M este mijlocul segmentului AB $x_M = 2$, $y_M = 2$	3p 2p
6.	$AB = 3$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 =$ $= 6 - 1 = 5$	3p 2p
b)	$2A - B(2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B(0)$	3p 2p
c)	$B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B(x) \cdot B(1) - (x+1)A = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x+2 & x+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x+2 & x+1 \\ x+1 & 3x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 1-2x \end{pmatrix}$ și $\det(B(x) \cdot B(1) - (x+1)A) = 4x^2 - 2x - 1$, pentru orice număr real x $4x^2 - 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$, de unde obținem $x = -\frac{1}{2}$ sau $x = 1$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 =$ $= 2 - 6 = -4$	3p 2p
b)	$0 \circ x = 0 + x - 6 \cdot 0 \cdot x = 0 + x - 0 = x$, pentru orice număr real x $x \circ 0 = x + 0 - 6 \cdot x \cdot 0 = x + 0 - 0 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	2p 3p

c)	$m \circ (3-m) = 3-6m(3-m)$, pentru orice număr întreg m	2p
	$3-6m(3-m) < 3 \Leftrightarrow m(m-3) < 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=1$ și $m=2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 4x^3 =$ $= 6x^2 - 12x^3 = 6x^2(1-2x), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x^4}{x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 2}{x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{4}{x^3}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^3}} = 2$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = \frac{1}{2}$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ $f(0) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{16}$ și $f(2) = -30$, deci $-30 \leq f(x) \leq \frac{33}{16}$, pentru orice $x \in [0, 2]$, de unde obținem $-32 \leq 2x^3 - 3x^4 \leq \frac{1}{16}$, pentru orice $x \in [0, 2]$	2p 3p
2.a)	$\int_2^3 (f(x) - 3e^x) dx = \int_2^3 2x dx = x^2 \Big _2^3 =$ $= 9 - 4 = 5$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x(f(x) - 2x) dx = \int_0^1 3xe^x dx = 3xe^x \Big _0^1 - 3e^x \Big _0^1 =$ $= 3e - 0 - 3e + 3 = 3$	3p 2p
c)	$\int_0^1 \frac{f'(x) - x}{2f(x) - x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2f(x) - x^2)'}{2f(x) - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 2f(x) - x^2 \Big _0^1 = \frac{1}{2} \ln \left(e + \frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2} \ln \left(e + \frac{1}{2}\right) = a \ln \left(e + \frac{1}{2}\right)$, de unde obținem $a = \frac{1}{2}$	3p 2p