

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $5(1+2i) - 2i(5-i) = 3$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 1 + a^2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x^2 + 1) = 2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , astfel încât $BC = 10$ și $\sin B = 2 \sin C$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = O_3$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) = xA(x) - (x-1)I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x+y)^2 - 2(x-y) - 3$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 2 = 5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * (x+1) = 8$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m * n = 2mn$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 10)\sqrt{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{e}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x + \frac{1}{e^x + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = e^2 + 1$.

5p b) Arătați că $\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = 1$.

5p c) Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$5(1+2i) - 2i(5-i) = 5+10i-10i+2i^2 =$ $= 5+2 \cdot (-1) = 3$	3p 2p
2.	$f(a) = a^2 - 2a - 3$, deci $a^2 - 2a - 3 = 1 + a^2$ $-2a = 4$, de unde obținem $a = -2$	3p 2p
3.	$2x^2 + 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ $x = -2$ sau $x = 2$, care convin	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	2p 3p
5.	$\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc Mijlocul segmentului AC are coordonatele $(3,1)$, de unde obținem $D(5,-4)$	2p 3p
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC}$, $\sin C = \frac{AB}{BC}$, deci $AC = 2AB$ Cum $AB^2 + AC^2 = 100$, obținem $AB = 2\sqrt{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$	2p 3p
b)	$A(x) - I_3 = \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ x & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = \begin{pmatrix} x^2 - x^2 & -x^2 + x^2 & 0 \\ x^2 - x^2 & -x^2 + x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$A(x) \cdot A(x) = 2A(x) - I_3$, pentru orice număr real x $2A(x) - I_3 = xA(x) - (x-1)I_3 \Leftrightarrow (x-2)(A(x) - I_3) = O_3$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$	2p 3p

2.a)	$0 * 2 = (0 + 2)^2 - 2(0 - 2) - 3 =$ $= 4 + 4 - 3 = 5$	3p 2p
b)	$x * (x + 1) = 4x^2 + 4x$, pentru orice număr real x $4x^2 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, de unde obținem $x = -2$ sau $x = 1$	2p 3p
c)	$(m + n)^2 - 2(m - n) - 3 = 2mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 - 2m + 2n - 3 = 0$ $(m - 1)^2 + (n + 1)^2 = 5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0, 1)$, $(2, 1)$ și $(3, 0)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (2x - 5)\sqrt{x} + (x^2 - 5x + 10) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$ $= \frac{5x^2 - 15x + 10}{2\sqrt{x}} = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, 1]$, deci f este crescătoare pe $(0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, 2]$, deci f este descrescătoare pe $[1, 2]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2 \sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 10}{x^2} \right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-5x + 10}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{5}} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 10}{5x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^2 (x + e^x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^x \right) \Big _0^2 =$ $= 2 + e^2 - 1 = e^2 + 1$	3p 2p
b)	$\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big _{-1}^1 =$ $= \ln(e + 1) - \ln \frac{1 + e}{e} = \ln e = 1$	3p 2p
c)	$\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \int_0^1 x(e^x + e^{-x} + 1) dx = \int_0^1 x(e^x - e^{-x} + x)' dx = x(e^x - e^{-x} + x) \Big _0^1 -$ $-\int_0^1 (e^x - e^{-x} + x) dx = e - \frac{1}{e} + 1 - \left(e^x + e^{-x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{e}$ $\frac{5}{2} - \frac{2}{e} = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$, de unde obținem $m = 5$	3p 2p