

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\left(10 + \frac{1}{2}\right)\left(10 - \frac{1}{2}\right) = \frac{399}{4}$.
- 5p** 2. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 10 - x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2 + 13) = 2$.
- 5p** 4. După o ieftinire cu 20%, prețul unei tablete este 800 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,7)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB . Calculați lungimea segmentului AM .
- 5p** 6. Arătați că $2\sin^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p** b) Arătați că $A(a) \cdot A(-a) = (2 - a^2)I_2$, pentru orice număr real a , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1) \cdot X = A(2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + xy - x - y + 1$.
- 5p** a) Arătați că $3 * 2 = 11$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * (-x) = 1$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $2^x * 4 = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2+4} dx = \frac{5}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 1) dx = 2 \ln \frac{5}{4}$.
- 5p** c) Determinați $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva lui f pentru care $F(0) = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(10 + \frac{1}{2}\right)\left(10 - \frac{1}{2}\right) = 100 - \frac{1}{4} =$	3p
	$= \frac{400 - 1}{4} = \frac{399}{4}$	2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x + 1 = 10 - x$	3p
	$3x = 9 \Rightarrow x = 3$	2p
3.	$x^2 + 13 = 7^2 \Rightarrow x^2 - 36 = 0$	3p
	$x = -6$ sau $x = 6$, care convin	2p
4.	$p - \frac{20}{100} \cdot p = 800$, unde p este prețul tabletei înainte de ieftinire	3p
	$p = 1000$ de lei	2p
5.	$AB = 6$	2p
	$AM = \frac{AB}{2} = 3$	3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	2p
	$2\sin^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = 0$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 =$	3p
	$= -1 - 1 = -2$	2p
b)	$A(a) \cdot A(-a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a+1 & 1 \\ 1 & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a^2 & 0 \\ 0 & 2-a^2 \end{pmatrix} =$	3p
	$= (2-a^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2-a^2)I_2$, pentru orice număr real a	2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = -1 \neq 0$, deci există $(A(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	3p
	$X = A^{-1}(1) \cdot A(2) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$3 * 2 = 3^2 + 3 \cdot 2 - 3 - 2 + 1 =$	3p
	$= 9 + 6 - 3 - 2 + 1 = 11$	2p

b)	$x * (-x) = x^2 + x \cdot (-x) - x - (-x) + 1 =$ $= x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 2^x - 4 + 1 = 1 \Leftrightarrow 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^x + 4)(2^x - 1) = 0$ $2^x = 1$, de unde obținem $x = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+2x+2) - (x^2+2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} =$ $= \frac{(2x+2)(x^2+2x+2 - x^2 - 2x - 3)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = 1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; pentru $x \in (-\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pentru $x \in [-1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $f(-1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, f este continuă și $f(x) \neq 1$, pentru orice număr real x , deci $\text{Im } f = (1, 2]$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2+4} dx = \int_0^1 (x+2) dx =$ $= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _0^1 = \frac{5}{2}$	2p 3p
b)	$\int_0^1 (f^2(x) - 1) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+4} - 1 \right) dx = \int_0^1 \frac{4x}{x^2+4} dx =$ $= 2 \ln(x^2+4) \Big _0^1 = 2 \ln 5 - 2 \ln 4 = 2 \ln \frac{5}{4}$	2p 3p
c)	$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} dt + \int_0^x \frac{2}{\sqrt{t^2+4}} dt = \left(\sqrt{t^2+4} + 2 \ln(t + \sqrt{t^2+4}) \right) \Big _0^x =$ $= \sqrt{x^2+4} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) - 2 - 2 \ln 2, x \in \mathbb{R}$	3p 2p