

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 = 3$ și $a_3 = 5$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Determinați numărul natural n pentru care $f(n) = 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 9} = x - 1$.
- 5p 4. Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, 1)$, $N(3, 3)$, $P(4, 3)$ și $Q(1, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele MN și PQ .
- 5p 6. Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC , în care $AB = 5$ și $\cos B = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A \cdot A) = a^2 b^2$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p b) Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot X = X \cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
- 5p c) Pentru $a = 4$ și $b = 0$, determinați matricele $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y \cdot Y = A$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $3 * 3 = 12$.
- 5p b) Demonstrați că $x * 0 = 0 * x = x$, pentru orice $x \in M$.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $(x^2 + 2x) * 3 = 7$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x+1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că funcția f este convexă.
- 5p c) Se consideră funcția $g: (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1, x_2 \in (-1, 0]$ astfel încât $x_1 \leq x_2$, atunci $g(x_1) \geq g(x_2)$.
2. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^3$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4}$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx = \frac{1}{12}$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx \leq \int_0^1 (f(x))^n dx$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_3 - a_2 = 2$ $a_1 = a_2 - r = 1$	3p 2p
2.	$f(n) = n^2 - 1$, deci $n^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 - 4 = 0$ Cum n este număr natural, obținem $n = 2$	3p 2p
3.	$x^2 - 9 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x = 10$ $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ este egal cu $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$	3p 2p
5.	$m_{MN} = 1$, $m_{PQ} = \frac{3-a}{3}$ $MN \parallel PQ$, de unde obținem $m_{MN} = m_{PQ} \Leftrightarrow 3 - a = 3 \Leftrightarrow a = 0$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{BC}$ $BC = 10$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\det(A \cdot A) = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
b)	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu $x, y, z, t \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix}$ și $X \cdot A = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$ $ay = by$ și $az = bz$, deci $y(a-b) = 0$ și $z(a-b) = 0$ și, cum $a \neq b$, obținem $y = z = 0$, deci există numerele reale x și t astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$Y \cdot Y = A$, deci $A \cdot Y = (Y \cdot Y) \cdot Y = Y \cdot (Y \cdot Y) = Y \cdot A$, deci $Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $Y \cdot Y = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\alpha^2 = 4$ și $\beta^2 = 0$, deci $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, care convin	2p 3p

2.a)	$3 * 3 = 3\sqrt{3+1} + 3\sqrt{3+1} =$ $= 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$	3p 2p
b)	$x * 0 = x \cdot \sqrt{0+1} + 0 \cdot \sqrt{x+1} = x$, pentru orice $x \in M$ $0 * x = 0 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \sqrt{0+1} = x$, pentru orice $x \in M \Rightarrow x * 0 = 0 * x = x$, pentru orice $x \in M$	2p 3p
c)	$(x^2 + 2x)\sqrt{3+1} + 3\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x) + 3\sqrt{(x+1)^2} = 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0$ $x = -4$, care nu convine, $x = \frac{1}{2}$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' \ln(x+1) + x(\ln(x+1))' =$ $= 1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f''(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția f este convexă	3p 2p
c)	$\ln(x+1) \leq 0$ și $\frac{x}{x+1} \leq 0$, pentru orice $x \in (-1, 0]$, deci $f'(x) \leq 0$, de unde obținem că f este descrescătoare pe $(-1, 0]$ Pentru orice $x_1, x_2 \in (-1, 0]$ cu $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, deci $x_1 \ln(x_1+1) \geq x_2 \ln(x_2+1)$ de unde obținem $\ln(x_1+1)^{x_1} \geq \ln(x_2+1)^{x_2}$, deci $(x_1+1)^{x_1} \geq (x_2+1)^{x_2}$, adică $g(x_1) \geq g(x_2)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x^3) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big _0^1 =$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx = \int_0^1 x^2 (1-x^3)^3 dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^3)' (1-x^3)^3 dx = -\frac{1}{12} (1-x^3)^4 \Big _0^1 =$ $= 0 - \left(-\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{12}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx - \int_0^1 (f(x))^n dx = \int_0^1 (1-x^3)^{n+1} dx - \int_0^1 (1-x^3)^n dx = -\int_0^1 x^3 (1-x^3)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n $x^3 \geq 0$ și $1-x^3 \geq 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$, deci $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx - \int_0^1 (f(x))^n dx \leq 0$, de unde obținem $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx \leq \int_0^1 (f(x))^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p