Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z^2 - 4z + 5 = 0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(0,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt[3]{x^3 + 2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,3)$ și $C(4,a)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

5p **6.** Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Demonstrați că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\ln x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in (0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 4(x+y) + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a = 10$, arătați că $1 * 2 = 0$.

5p **b)** Pentru $a = 20$, arătați că $e = 5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a \in [20,+\infty)$, atunci mulțimea $H = [4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x) = 6^x - 3^x + 2^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(0) = \ln 4$.

5p **b)** Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, \ln(16e))$ este situat pe această tangentă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z-z^2=2(1+i)-(1+i)^2=$	**2p**
	$=2+2i-\left(1+2i+i^2\right)=2+2i-2i=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2-8m$	**2p**
	$f(x)>0$ pentru orice număr real x, deci $\Delta<0$, de unde obținem $m\in(0,8)$	**3p**
3.	$\log_5\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\right)=2\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-1=5^2$	**3p**
	$x=26$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**2p**
	$2^n=32$, deci $n=5$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow ABDC$ paralelogram, deci segmentele AD și BC au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x=8$ și $y=5$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	**2p**
	$\cos x-\sin x=\sin x-\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}4-2a-2b+2ab&0&2a+2b-2ab\\0&4&0\\2a+2b-2ab&0&4-2a-2b+2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}ab-a-b+2&0&2-(ab-a-b+2)\\0&2&0\\2-(ab-a-b+2)&0&ab-a-b+2\end{pmatrix}=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(pq-p-q+2)=2I_3\Leftrightarrow A(pq-p-q+2)=A(2)\Leftrightarrow pq-p-q=0$	**2p**
	Cum p și q sunt numere întregi, din $(p-1)(q-1)=1$, obținem $p=0$, $q=0$ sau $p=2$, $q=2$	**3p**

2.a)	$x*y=-\frac{3}{5}xy+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x+y=-\frac{3}{5}x\left(y-\frac{5}{3}\right)+y-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x+1\right)+\frac{5}{3}=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}=-\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3x}-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\frac{(x-1)^2}{x}+\frac{5}{3},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x>0\Rightarrow\frac{5(x-1)^2}{3x}\geq 0$, deci $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{3}*y=\frac{5}{3}$, unde x și y sunt numere reale	**3p**
	$\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}=\left(\left(\frac{1}{3}*\ldots*\frac{4}{3}\right)*\frac{5}{3}\right)*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+4-2x}{x^2+1}=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right)=$	**2p**
	$=4-\ln 1=4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(25-x^2\right)dx=\left.\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=25-\frac{1}{3}=\frac{74}{3}$	**2p**
b)	$\int_{-3}^{3}\left\|x f(x)\right\|dx=-\int_{-3}^{0}x\sqrt{25-x^2}\,dx+\int_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-3}^{0}-\left.\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^3=\frac{125}{3}-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+\frac{125}{3}=\frac{122}{3}$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{1}{f^{n+1}(x)}dx-\int_0^1\frac{1}{f^n(x)}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}\left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1\right)dx$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}>0$ și $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1<0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow I_{n+1}-I_n\leq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător	**3p**