

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Arătați că $\sqrt{3}(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})=0$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Determinați numerele reale a , știind că $f(a)=a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{7x-5}=4^x$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice relația $2^n\leq 16$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$, $N(4,3)$ și $P(6,1)$. Determinați lungimea segmentului MQ , unde Q este mijlocul segmentului NP . |
| 5p | 6. Arătați că $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \cos 60^\circ - \cos 45^\circ = 0$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(2))=5$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x)\cdot A(y)=3I_2$. |
| 5p | c) Determinați numărul întreg p pentru care $\det(A(p)\cdot A(p)+I_2)=5$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-(x+y)+2$. |
| 5p | a) Arătați că $2*2=2$. |
| 5p | b) Demonstrați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | c) Calculați $1*2*3*\dots*2018$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $1\leq f(x)+f(y)\leq 3$, pentru orice numere reale x și y . |
| | 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x^3)dx=9$. |
| 5p | b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_2^4 \frac{3}{f'(x)+12}dx=\frac{\pi}{8}$. |

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{3}(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{12}=$ $=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	3p 2p
2.	$f(a)=a^2-2$ $a^2-2=a$, deci $a=-1$ sau $a=2$	2p 3p
3.	$2^{7x-5}=2^{2x} \Leftrightarrow 7x-5=2x$ $x=1$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile În mulțimea A sunt 4 numere care verifică relația dată, deci sunt 4 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{5}$	1p 2p 2p
5.	$Q(5,2)$ $MQ=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2}=4$	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ$ $\sin 30^\circ+\sin 45^\circ-\cos 60^\circ-\cos 45^\circ=\sin 30^\circ+\sin 45^\circ-\sin 30^\circ-\sin 45^\circ=0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 =$ $=4+1=5$	3p 2p
b)	$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} xy-1 & x+2 \\ -y-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $x=-2$, $y=-2$	3p 2p
c)	$A(p) \cdot A(p) + I_2 = \begin{pmatrix} p^2 & p+2 \\ -p-2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(p) \cdot A(p) + I_2) = 5p^2 + 4p + 4$ $5p^2 + 4p + 4 = 5 \Leftrightarrow 5p^2 + 4p - 1 = 0$ și, cum p este număr întreg, obținem $p=-1$	2p 3p
2.a)	$2 * 2 = 2 \cdot 2 - (2+2) + 2 =$ $=4-4+2=2$	3p 2p
b)	$x * y = xy - x - y + 1 + 1 =$ $=x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$1 * x = x$, pentru orice număr real x $1 * 2 * 3 * \dots * 2018 = 1 * (2 * 3 * \dots * 2018) = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+2x+2) - (x^2+x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} =$ $= \frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(-1) = 1, f'(-1) = -1$ Ecuția tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, adică $y = -x$	2p 3p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, -2]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-2, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2, 0]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, f(-2) = \frac{3}{2}, f(0) = \frac{1}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, deci $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ și $\frac{1}{2} \leq f(y) \leq \frac{3}{2}$, de unde obținem $1 \leq f(x) + f(y) \leq 3$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - x^3) dx = \int_0^1 (-6x^2 + 12x + 5) dx = \left(-2x^3 + 6x^2 + 5x \right) \Big _0^1 =$ $= -2 + 6 + 5 - 0 = 9$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x), F''(x) = 3x^2 - 12x + 12, x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = 3(x-2)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , deci funcția F este convexă pe $\mathbb{R}$	3p 2p
c)	$f'(x) = 3(x-2)^2 \Rightarrow \int_2^4 \frac{3}{f'(x)+12} dx = \int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctg \frac{x-2}{2} \Big _2^4 =$ $= \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{8}$	3p 2p