

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 7$ și $a_3 = 15$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$. Determinați numerele naturale n , pentru care $f(n) < 8$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 1} = x + 1$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y = \frac{x}{2} + 2$ și $d_2: y = (m - 3)x + 1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
- 5p 6. Arătați că, dacă $\sin 2x = \frac{1}{2}$, atunci $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $X(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(X(3, 1)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $X(a, b)X(c, d) = X(ac + 9bd, ad + bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care $\det(X(m, n)) = 1$.
2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 4X^2 - 7X + m$, unde m este număr real.
- 5p a) Pentru $m = 9$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X + \sqrt{2}$.
- 5p c) Determinați numărul real m , știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^x + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\sqrt[n]{e} \leq \frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.
2. Se consideră funcția $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x-2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx = \frac{4}{3}$.
- 5p b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x+2)}{x+2} \cdot \sqrt{e^x}$ este egal cu π .
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_3^x f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{t-2}} dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{7 + 15}{2} = 11$	3p 2p
2.	$3n + 2 < 8 \Leftrightarrow n < 2$ Cum n este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	2p 3p
3.	$x^2 - 1 = (x + 1)^2 \Rightarrow 2x + 2 = 0$ $x = -1$, care convine	3p 2p
4.	$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$	3p 2p
5.	$m_{d_1} = \frac{1}{2}$, $m_{d_2} = m - 3$ d_1 și d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m - 3) = -1 \Leftrightarrow m = 1$	2p 3p
6.	$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$X(3,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(3,1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 9 \cdot 1 = 9 - 9 = 0$	3p 2p
b)	$X(a,b)X(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 9d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 9bd & ad + bc \\ 9bc + 9ad & 9bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 9bd & ad + bc \\ 9(ad + bc) & ac + 9bd \end{pmatrix} = X(ac + 9bd, ad + bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d	3p 2p
c)	$\det(X(m,n)) = m^2 - 9n^2$ Cum m și n sunt numere întregi, $(m - 3n)(m + 3n) = 1 \Rightarrow m - 3n = m + 3n = -1$ sau $m - 3n = m + 3n = 1$ și obținem $(-1, 0)$ sau $(1, 0)$	2p 3p
2.a)	$f = 2X^3 - 4X^2 - 7X + 9 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 9 = 2 - 4 - 7 + 9 = 0$	2p 3p
b)	$f(-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-2\sqrt{2}) - 4 \cdot 2 - 7 \cdot (-\sqrt{2}) + m = 0$ $m = 8 - 3\sqrt{2}$	3p 2p

c)	$x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$ $f(1) = 0 \Rightarrow m = 9$	3p 2p
-----------	--	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' =$ $= e^x + (x-1)e^x = xe^x, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{e^{-x}} + 1 \right) = 1$, deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = 0$, obținem $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$, deci $\left(\frac{1}{n} - 1\right)e^{\frac{1}{n}} + 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{e} \leq \frac{n}{n-1}$	3p 2p
2.a)	$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx = \int_2^3 x(x-2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big _2^3 =$ $= 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$	3p 2p
b)	$g(x) = \sqrt{xe^x} \Rightarrow V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 xe^x dx = \pi(x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= 0 - \pi \cdot (-1) \cdot e^0 = \pi$	3p 2p
c)	$\int_3^x f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{t-2}} dt = \int_3^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big _3^x = \frac{x^2 - 9}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_3^x f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{t-2}} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{2x^2} = \frac{1}{2}$	3p 2p