

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Arătați că $2 \cdot \left(2 - \frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right) = 1$.
5p	2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 4$. Arătați că $f(1) + g(1) = 0$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4-x} = 4$.
5p	4. Un produs costă 70 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 30%.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(-3, 0)$ și $C(0, 4)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC .
5p	6. Se consideră triunghiul ABC , în care $AC = 2$, $BC = 4$ și unghiul A are măsura egală cu 30° . Arătați că $\sin B = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Arătați că $\det A = 7$.
5p	b) Arătați că $2B + I_2 = 3A$.
5p	c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3 - (x - 3)(y - 3)$.
5p	a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
5p	b) Arătați că $e = 2$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
5p	c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x * (x + 6) \geq 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x} + \ln x - 5$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
5p	b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
5p	c) Arătați că nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 3$.
5p	a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - e^x - 3) dx = 7$.
5p	b) Arătați că $\int_0^1 x(f(x) - 3x^2) dx = \frac{5}{2}$.
5p	c) Determinați $a \in (0, 1)$, știind că $\int_0^a \frac{1}{f(x) - f'(x)} dx = \frac{1}{6}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 \cdot \left(2 - \frac{3}{4} : \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \left(2 - \frac{3}{2} \right) =$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	3p 2p
2.	$f(1) = 3$ $g(1) = -3 \Rightarrow f(1) + g(1) = 3 + (-3) = 0$	2p 3p
3.	$2^{4-x} = 2^2 \Leftrightarrow 4 - x = 2$ $x = 2$	3p 2p
4.	$\frac{30}{100} \cdot 70 = 21$ de lei Prețul după scumpire este $70 + 21 = 91$ de lei	3p 2p
5.	$AB = 4$, $AC = 3$ $BC = 5$, de unde obținem $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 12$	2p 3p
6.	$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin B} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$ $\sin B = \frac{1}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 =$ $= 3 + 4 = 7$	3p 2p
b)	$2B + I_2 = 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3A$	3p 2p
c)	$A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X \Leftrightarrow (A - B + I_2) \cdot X = I_2$ Cum $\det(A - B + I_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, obținem $X = (A - B + I_2)^{-1}$, deci $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$1 * 3 = 3 - (1 - 3)(3 - 3) =$ $= 3 - 0 = 3$	3p 2p

b)	$x * 2 = 3 - (x - 3)(2 - 3) = 3 + x - 3 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$2 * x = 3 - (2 - 3)(x - 3) = 3 + x - 3 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p
c)	$x * (x + 6) = 3 - (x - 3)(x + 3)$, pentru orice număr real x	2p
	$3 - (x - 3)(x + 3) \geq 3 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \leq 0$, de unde obținem $x \in [-3, 3]$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 0 =$	3p
	$= \frac{-4 + x}{x^2} = \frac{x - 4}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$	2p
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 4] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 4]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [4, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4, +\infty)$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} + \frac{\ln x}{x} - \frac{5}{x} \right) = 0$	3p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} + \ln x - 5 \right) = +\infty$, deci nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - e^x - 3) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_0^1 x(f(x) - 3x^2) dx = \int_0^1 (xe^x + 3x) dx = (xe^x - e^x) \Big _0^1 + \frac{3x^2}{2} \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$	2p
c)	$f'(x) = e^x + 6x \Rightarrow f(x) - f'(x) = 3(x - 1)^2$, deci $\int_0^a \frac{1}{f(x) - f'(x)} dx = \frac{1}{3} \int_0^a \frac{1}{(x - 1)^2} dx =$	3p
	$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} \Big _0^a = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a - 1} + 1 \right)$, pentru orice $a \in (0, 1)$ $-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a - 1} + 1 \right) = \frac{1}{6}$, de unde obținem $a = \frac{1}{3}$, care convine	2p