

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M\_mate-info$**

**Varianta 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + ax - 5$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $M(1, 2)$  aparține graficului funcției  $f$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $M(3, 4)$ ,  $N(0, 1)$  și  $P(3, 0)$ . Determinați ecuația dreptei  $d$  care trece prin punctul  $P$  și este paralelă cu dreapta  $MN$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $C$ . Arătați că  $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = 8$ .
- 5p** b) Determinați matricea  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , știind că  $aB = A(a) - 2I_3$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ .
- 5p** a) Arătați că  $2 * 0 = 2$ .
- 5p** b) Demonstrați că, dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale astfel încât  $a \leq b$ , atunci  $a * b = b$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $a$  pentru care ecuația  $f(x) = a$  are soluție.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$ .

- 5p** **b)** Arătați că  $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$ , unde  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$ .
- 5p** **c)** Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , cu  $0 \leq a < b$ . Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_mate-info***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1. | $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 =$<br>$= 1 - 1 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                     | 3p<br>2p       |
| 2. | $f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a - 5 = 2$<br>$a = 6$                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3p<br>2p       |
| 3. | $\log_4(x^2 + 1) = \log_4(x(x+1))$ , deci $x^2 + 1 = x^2 + x$<br>$x = 1$ , care convine                                                                                                                                                                                                                                   | 3p<br>2p       |
| 4. | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile<br>În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 2 și cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile<br>$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$ | 2p<br>2p<br>1p |
| 5. | $m_{MN} = 1$ și, cum dreptele sunt paralele, obținem $m_d = 1$<br>$P \in d$ , deci ecuația dreptei $d$ este $y - y_P = m_d(x - x_P)$ , adică $y = x - 3$                                                                                                                                                                  | 3p<br>2p       |
| 6. | $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$<br>$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$                                                                                                                                                                                  | 2p<br>3p       |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |          |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$<br>$= 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$                                                                                                                                                                                                                                                          | 2p<br>3p |
| b)   | $A(a) - 2I_3 = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 3a & 0 & -3a \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$<br>$aB = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ , deci $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ | 3p<br>2p |
| c)   | $A(n) \cdot A(-n) = \begin{pmatrix} 4+2n^2 & 0 & -2n^2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6n^2 & 0 & 4-6n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(n) \cdot A(-n)) = 64(1-n^2)$ , unde $n$ este număr<br>natural<br>$64(1-n^2) > 0$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 0$                                                                                                                                                                                                        | 3p<br>2p |

|             |                                                                                                                                                               |           |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.a)</b> | $2 * 0 = \frac{1}{2}(2 + 0 +  2 - 0 ) =$                                                                                                                      | <b>3p</b> |
|             | $= \frac{1}{2}(2 + 2) = 2$                                                                                                                                    | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $a \leq b \Rightarrow  a - b  = b - a$                                                                                                                        | <b>2p</b> |
|             | $a * b = \frac{1}{2}(a + b +  a - b ) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ astfel încât $a \leq b$ | <b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $x^2 + 1 \geq 2x$ și $x^2 + 1 \geq -2x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $((2x) * (x^2 + 1)) * (-2x) =$                                                   | <b>3p</b> |
|             | $= (x^2 + 1) * (-2x) = (-2x) * (x^2 + 1) = x^2 + 1$ , pentru orice număr real $x$<br>$x^2 + 1 = 10$ , deci $x = -3$ sau $x = 3$                               | <b>2p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                             |           |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} =$                                                                                                                                                                                                  | <b>3p</b> |
|             | $= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}, x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                              | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 3)}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = 0$          | <b>3p</b> |
|             | Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$                                                                                                                                                | <b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $f'(x) > 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci $f$ este strict crescătoare                                                                                                                                                                | <b>2p</b> |
|             | Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și $f$ este funcție continuă, ecuația $f(x) = a$ are soluție $\Leftrightarrow a \in (-\infty, 0)$                                               | <b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = \int_0^2 (x^2 + x + 3) \frac{x}{x^2 + x + 3} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$                                                                                                              | <b>3p</b> |
|             | $= \frac{4}{2} = 2$                                                                                                                                                                                                                         | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx = \int_1^2 \frac{(x^2+x+3)'}{x^2+x+3} dx =$                                                                                                                                            | <b>3p</b> |
|             | $= \ln(x^2 + x + 3) \Big _1^2 = \ln 9 - \ln 5 = \ln \frac{9}{5}$                                                                                                                                                                            | <b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $0 \leq \frac{x}{x^2 + x + 3} \leq \frac{1}{2}$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ , deci $0 \leq f^n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și orice număr natural nenul $n$                             | <b>2p</b> |
|             | $0 \leq I_n = \int_a^b f^n(x) dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$ , pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ,<br>obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ | <b>3p</b> |