

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = 3$.
- 5p 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + mx + 7 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2 = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-2) + \log_2(x+2) = 5$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 6)$ și $B(6, 2)$. Determinați coordonatele punctului M , știind că $\overline{AM} = \overline{MB}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 3\sqrt{3}$, $AC = 4$ și $A = \frac{2\pi}{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - ay - z = 1, \\ x + y + az = 2 \end{cases}$ unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a)) = a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Pentru $a = 0$, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x - 2019)(y - 2019) + 2019$.
- 5p a) Arătați că $x * 2019 = 2019$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numerele reale x , știind că $(x * x) * x = x$.
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $m * n = 2020$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\sqrt{x} - \ln \frac{x}{4} \geq 2$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 9) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră $I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x) dx$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = 3 \Rightarrow b_3 = 9$ $b_1 + b_2 + b_3 = 1 + 3 + 9 = 13$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = -m, \quad x_1 x_2 = 7$ $-2m + 21 = 1$, deci $m = 10$	2p 3p
3.	$(x - 2)(x + 2) = 2^5 \Rightarrow x^2 - 36 = 0$ $x = -6$, care nu convine, $x = 6$, care convine	3p 2p
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de numere	1p 1p 3p
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB $x_M = 4, \quad y_M = 4$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$ $= \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + (-1) - 0 - 0 - 0 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^3 + a =$ $= a(1 - a^2) = a(1 - a)(1 + a)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	Pentru $a = 0$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1 + \alpha, 1 - \alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ Pentru orice α număr întreg, numerele $x_0 = 1 + \alpha, \quad y_0 = 1 - \alpha$ și $z_0 = \alpha$ sunt întregi	3p 2p
2.a)	$x * 2019 = (x - 2019)(2019 - 2019) + 2019 =$ $= 0 + 2019 = 2019$, pentru orice număr real x	3p 2p

b)	$x * x = (x - 2019)^2 + 2019, (x * x) * x = (x - 2019)^3 + 2019$ $(x - 2019)^3 + 2019 = x \Leftrightarrow (x - 2019)((x - 2019)^2 - 1) = 0$, deci $x = 2018$ sau $x = 2019$ sau $x = 2020$	2p 3p
c)	$(m - 2019)(n - 2019) + 2019 = 2020 \Leftrightarrow (m - 2019)(n - 2019) = 1$ Cum m și n sunt numere întregi, obținem $m = 2018, n = 2018$ sau $m = 2020, n = 2020$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} =$ $= \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 1, f'(1) = -\frac{1}{2}$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ $x \in (0, 4] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f descrescătoare pe $(0, 4]$ și $x \in [4, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[4, +\infty)$ Cum $f(4) = 2 - \ln 4$, obținem $f(x) \geq 2 - \ln 4$, deci $\sqrt{x} - \ln \frac{x}{4} \geq 2$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	1p 2p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 9) f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$	3p 2p
b)	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9}, F''(x) = f'(x) = \frac{18x}{(x^2 + 9)^2}, x \in \mathbb{R}$, unde funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow F''(x) < 0$ și $x \in (0, +\infty) \Rightarrow F''(x) > 0$, deci F are un singur punct de inflexiune	2p 1p 2p
c)	$x \in [0, 1] \Rightarrow x^{2n} \geq 0$ și, cum $0 \leq f(x) \leq 1$, obținem $0 \leq x^{2n} f(x) \leq x^{2n}$ $0 \leq I_n = \int_0^1 x^{2n} f(x) dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{2n+1}$ și $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	2p 3p