

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3\right) = 1$.
- 5p 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - x + a = 0$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1 x_2 - 1 < 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = 9^x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -1)$ și $B(4, 4)$. Demonstrați că punctele A , O și B sunt coliniare.
- 5p 6. Demonstrați că $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 16$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B = aI_2$.
- 5p c) Demonstrați că $\det\left(xA + \frac{1}{x}B\right) \geq 49$, pentru orice număr real nenul x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + 15(x + y) + 42$.
- 5p a) Arătați că $(-2) \circ (-2) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 5(x + 3)(y + 3) - 3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x , pentru care $(x - 3) \circ (x - 3) \circ (x - 3) = 197$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = (x - 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- 5p c) Demonstrați că $-e \leq f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 1) dx = 2$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Calculați $\int_1^e f(x) \ln x dx$.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3\right) = 30 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) = 30 \cdot \frac{10-9}{30} =$ $= 30 \cdot \frac{1}{30} = 1$	3p 2p
2.	$x_1 x_2 = a$ $a - 1 < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 1)$	3p 2p
3.	$3^{x+1} = 3^{2x} \Leftrightarrow x+1 = 2x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 9 numere naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu 3, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	1p 2p 2p
5.	$AO = \sqrt{2}$, $OB = 4\sqrt{2}$ $AB = 5\sqrt{2} \Rightarrow AB = AO + OB$, deci punctele A , O și B sunt coliniare	2p 3p
6.	$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x =$ $= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru orice număr real x	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot (-5) =$ $= 6 + 10 = 16$	3p 2p
b)	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $a = 16$	3p 2p
c)	$\det \left(xA + \frac{1}{x}B \right) = \begin{vmatrix} x + \frac{6}{x} & -5x + \frac{5}{x} \\ 2x - \frac{2}{x} & 6x + \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 16x^2 + \frac{16}{x^2} + 17$ $16x^2 + \frac{16}{x^2} + 17 \geq 49 \Leftrightarrow 16x^2 + \frac{16}{x^2} - 32 \geq 0 \Leftrightarrow 16 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0$, relație adevărată pentru orice număr real nenul x	3p 2p

2.a)	$(-2) \circ (-2) = 5 \cdot (-2) \cdot (-2) + 15(-2 + (-2)) + 42 =$ $= 20 - 60 + 42 = 2$	3p 2p
b)	$x \circ y = 5xy + 15x + 15y + 45 - 3 =$ $= 5x(y+3) + 15(y+3) - 3 = 5(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$(x-3) \circ (x-3) = 5x^2 - 3$, $(x-3) \circ (x-3) \circ (x-3) = 25x^3 - 3$ $25x^3 - 3 = 197 \Leftrightarrow x = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2)e^x =$ $= e^x(1+x-2) = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} =$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$	3p 2p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, 2] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(1) = -e$ și $f(2) = 0$, deci $-e \leq f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2]$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x)-1)dx = \int_{-1}^1 3x^2 dx = x^3 \Big _{-1}^1 =$ $= 1 - (-1) = 2$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ $F'(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 3p
c)	$\int_1^e f(x) \ln x dx = \int_1^e (3x^2 + 1) \ln x dx = (x^3 + x) \ln x \Big _1^e - \int_1^e (x^3 + x) \cdot \frac{1}{x} dx = e^3 + e - \int_1^e (x^2 + 1) dx =$ $= e^3 + e - \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _1^e = e^3 + e - \left(\frac{e^3}{3} + e \right) + \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) = \frac{2e^3 + 4}{3}$	3p 2p