

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_2 = 4$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ și $g(x) = 2018 - x$. Calculați $g(f(1))$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x = 5^{x^2}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x - a^2y - a^2 = 0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a , știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox .
- 5p 6. Arătați că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -7$.
- 5p b) Demonstrați că $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale a , știind că $(aA(-1) + A(a))A(0) = (a^2 + 7)I_2$.
2. Se consideră polinomul $f = 4X^3 - 6X + m$, unde m este număr real.
- 5p a) Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m , polinomul f **nu** se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$.
- 5p c) Determinați numărul real nenul m , știind că $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)dx = 22$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.
- 5p c) Determinați numărul natural nenul n , știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_1 b_3 = b_2^2$ $b_1 b_2 b_3 = b_2^3 = 4^3 = 64$	2p 3p
2.	$f(1) = 0$ $g(f(1)) = g(0) = 2018$	2p 3p
3.	$5^{2x} = 5^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$	1p 2p 2p
5.	$m_d = \frac{a-1}{a^2}$ Dreapta d este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow \frac{a-1}{a^2} = 0$, deci $a = 1$	2p 3p
6.	Cum $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{5}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 =$ $= -6 - 1 = -7$	3p 2p
b)	$xA(y) - yA(x) = x \begin{pmatrix} y+2 & y \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy+2x-yx-2y & xy-yx \\ x-y & -2x+2y \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2(x-y) & 0 \\ x-y & -2(x-y) \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (x-y)A(0), \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
c)	$aA(-1) - (-1)A(a) = (a+1)A(0) \Rightarrow (aA(-1) + A(a))A(0) = (a+1)A(0)A(0) = 4(a+1)I_2$ $4(a+1) = a^2 + 7 \Leftrightarrow a = 1 \text{ sau } a = 3$	3p 2p
2.a)	$f = 4X^3 - 6X + 2 \Rightarrow f(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 2 =$ $= 4 - 6 + 2 = 0$	3p 2p

b)	Restul împărțirii polinomului f la $X^2 + X + 1$ este egal cu $-6X + m + 4$	3p
	Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f nu se divide cu $X^2 + X + 1$	2p
c)	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{3}{2}, x_1x_2x_3 = -\frac{m}{4} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{6}{m}$	3p
	$\left(\frac{6}{m}\right)^2 = -\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m = -9$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 0 - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$	3p
	$= -\frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$f(1) = 0, f'(1) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = 0$	3p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $f(\sqrt{x}) \geq 0 \Rightarrow 1 - \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$, deci $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^2 (x+1)f(x)dx = \int_0^2 (3x^3 + 3x^2 + 1)dx = \left(\frac{3x^4}{4} + x^3 + x\right)\Big _0^2 =$	3p
	$= 12 + 8 + 2 = 22$	2p
b)	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx = \int_0^1 3x^2e^{x^3}dx = e^{x^3}\Big _0^1 =$	3p
	$= e - 1$	2p
c)	$g(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow V = \pi \int_0^1 g^2(x)dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{\pi}{x+1}\Big _0^1 = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$	3p
	$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n = 2$	2p