

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianța 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul complex z , știind că $2\bar{z} - z = 1 - 3i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m , știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{\lg x}{\lg(x+2)} = \frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5, 2)$ și dreapta d de ecuație $y = x + 1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d .
- 5p** 6. Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(m) = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2mx + y + z = -1 \\ x + 2my + z = 0 \\ x + y + 2mz = 1 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(M(0)) = 2$.
- 5p** b) Determinați numerele reale m , știind că $\det(M(m)) = 0$.
- 5p** c) Pentru $m = -1$, demonstrați că, dacă (a, b, c) este o soluție a sistemului, cel mult unul dintre numerele a , b și c este întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4xy + 3x + 3y + \frac{3}{2}$.
- 5p** a) Demonstrați că $x * y = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = -\frac{1}{2}$.
- 5p** c) Determinați numerele reale a , știind că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y , unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ae^x - \frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^2 - \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că punctul $A\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{x+3}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x+3) f(x) dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln \frac{4}{3}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 e^x (x+3)^n (f(x))^n dx$. Demonstrați că $I_n + 2nI_{n-1} = e \cdot 5^n - 3^n$, pentru orice număr natural n , $n \geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi \Rightarrow 2\bar{z} - z = a - 3bi$, unde a și b sunt numere reale $a - 3bi = 1 - 3i \Rightarrow a = 1$ și $b = 1$, deci $z = 1 + i$	3p 2p
2.	$y_V = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$ Cum $\Delta = m^2 - 4$, obținem $m^2 - 4 = 0$, deci $m = -2$ sau $m = 2$	3p 2p
3.	$2\lg x = \lg(x + 2) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$, care nu convine, $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifrele distincte și impare are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	1p 2p 2p
5.	Panta dreptei d este $m_d = 1 \Rightarrow$ panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este $m = -1$ Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y = -x - 3$	3p 2p
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x - \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x - \cos x - \sin x) = 0$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\det(M(m)) = \begin{vmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{vmatrix} = 2(m+1)(2m-1)^2$, pentru orice număr real m $m = -1$ sau $m = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$a - b = \frac{1}{3}$, $b - c = \frac{1}{3}$ și $a - c = \frac{2}{3}$ Deoarece $a - b \notin \mathbb{Z}$, $b - c \notin \mathbb{Z}$ și $a - c \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ cel mult unul dintre numerele a , b și c este întreg	3p 2p
2.a)	$x * y = 4xy + 3x + 3y + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} =$ $= 4x\left(y + \frac{3}{4}\right) + 3\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

b)	$x * x = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}, x * x * x = 16\left(x + \frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{4},$ pentru orice număr real x	2p
	$16\left(x + \frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$ de unde obținem $x = -\frac{1}{2}$	3p
c)	$4\left(ae^x - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(ae^y - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} = ae^{x+y} - \frac{3}{4},$ pentru orice numere reale x și y	2p
	$4a^2 = a,$ deci $a = 0$ sau $a = \frac{1}{4}$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 16x - \frac{1}{x} =$	3p
	$= \frac{16x^2 - 1}{x} = \frac{(4x-1)(4x+1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$f(1) = 8, f'(1) = 15,$ deci ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 15x - 7$	3p
	$15 \cdot \frac{2}{3} - 7 = 3,$ deci punctul $A\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1,$ situat pe graficul funcției f	2p
c)	$x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) > 0,$ deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	2p
	Cum $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2},$ obținem $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$	3p
2.a)	$\int_0^1 (x+3) f(x) dx = \int_0^1 (2x+3) dx = \left(x^2 + 3x\right) \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 + 3 - 0 = 4$	2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{x+3} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{x+3}\right) dx = 2x \Big _0^1 - 3 \ln(x+3) \Big _0^1 =$	3p
	$= 2 - 3(\ln 4 - \ln 3) = 2 - 3 \ln \frac{4}{3}$	2p
c)	$I_n = \int_0^1 e^x (2x+3)^n dx = e^x (2x+3)^n \Big _0^1 - 2n \int_0^1 e^x (2x+3)^{n-1} dx =$	3p
	$= e \cdot 5^n - 3^n - 2n I_{n-1},$ deci $I_n + 2n I_{n-1} = e \cdot 5^n - 3^n,$ pentru orice număr natural $n, n \geq 1$	2p