Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=6$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+1)=\log_7 9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n\geq 10$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(1,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=\sqrt{2}$ și $BC=2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $2B-A=3C$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X\cdot A=B+2C$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Arătați că $5*4=4$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*6=6x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n}*n>4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x^2-15x+9$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3\left(x^2+4x-5\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x f''(x)}=0$.

2. Se consideră funcția $f:(-9,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{8x}{x+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x}\cdot f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=6(4+a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=3\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**2p**
2.	$f(a)=a+2$	**2p**
	$a+2=6$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$2x+1=9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n\geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{14}{23}$	**3p**
5.	$x_M=\frac{-1+1}{2}=0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$y_M=\frac{2+6}{2}=4$	**2p**
6.	$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{2}$	**3p**
	$AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 2=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
b)	$2B-A=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=3C$	**2p**
c)	$B+2C=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\frac{1}{2}(B+2C)\cdot A^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}9 & -14\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$5*4=(5-4)(4-4)+4=$	**3p**
	$=1\cdot 0+4=4$	**2p**

b)	$x*6=2x-4$, pentru orice număr real x	**3p**
	$2x-4=6x$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$\left(\frac{4}{n}-4\right)(n-4)+4>4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}-1\right)(n-4)>0$, unde n este număr natural nenul	**2p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$ și $n=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+6\cdot 2x-15=$	**3p**
	$=3x^2+12x-15=3\left(x^2+4x-5\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-5$ sau $x=1$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-5]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-5,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5,1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=3(2x+4),\ x\in\mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x f''(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-5}{e^x(2x+4)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{e^x(2x+6)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x(2x+8)}=0$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 8x\,dx=4x^2\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^6 \frac{1}{8x}\cdot f(x)dx=\int_1^6 \frac{1}{x+9}dx=\int_1^6 \frac{(x+9)'}{x+9}dx=\ln(x+9)\Big\vert_1^6=$	**3p**
	$=\ln 15-\ln 10=\ln\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=\int_0^3\frac{8x^2}{x^2+9}dx=8\int_0^3\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=8x\Big\vert_0^3-8\cdot\frac{9}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big\vert_0^3=24-6\pi$	**3p**
	$24-6\pi=6(4+a\pi)$, de unde obținem $a=-1$	**2p**