

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ și M , mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3 =$ $= 4 - 3 = 1$	3p 2p
2.	$5a - 3 = 2a + 3$ $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{2x+4} = 2^0$, de unde obținem $2x + 4 = 0$ $x = -2$	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$M(2,1)$, de unde obținem $MO = \sqrt{5}$ $MC = \sqrt{5}$, deci $MO = MC$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 =$ $= 3 - 2 = 1$	3p 2p
b)	$A(a) - A(0) = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}$ $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI_2$, pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(a^2) = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 2-2a^2 \\ 1-a^2 & 1+3a^2 \end{pmatrix}$, $A(a^2) - aA(a) = \begin{pmatrix} 3-3a & 2-2a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$ $\det(A(a^2) - aA(a)) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^2 = (1-a)^2 \geq 0$, pentru orice număr real a	2p 3p
2.a)	$0 \circ 2 = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 =$ $= 0 - 0 + 12 = 12$	3p 2p
b)	$(2x) \circ x = -x^2$, pentru orice număr real x $-x^2 = -1$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	2p 3p

c)	$m \circ n = m^2 - mn - 3mn + 3n^2 = (m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	2p
	$(m-n)(m-3n) = 3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m < n$, obținem perechile $(-4, -1)$ și $(0, 1)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{4x^2 - (4x-4) \cdot 2x}{x^4} =$	3p
	$= \frac{4x(2-x)}{x^4} = \frac{4(2-x)}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4x-4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 5$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 5$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ și pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	$f(1) = 5$, $f(2) = 6$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$, deci $5 \leq f(x) \leq 6$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, de unde obținem $ f(x) - f(y) \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = \int_1^e 4x \ln x dx = \int_1^e (2x^2)' \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - x^2 \Big _1^e =$	3p
	$= 2e^2 - 0 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	2p
c)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x), x \in (0, +\infty)$	2p
	$\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big _1^{\sqrt{e}} = \frac{(3e+2)^2 - 3^2}{2} = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	3p