

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 6$ și $b_6 = 18$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 4$. Determinați numerele reale m , știind că $f(m) = m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $100 \cdot 10^{2x} = 10^{3x}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ și $C(0, 4)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p 6. Arătați că $\sin 2x = 1$, știind că $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
- 5p c) Se consideră numerele reale a , b și c , astfel încât $A(a) \cdot A(b) = A(c)$. Demonstrați că $a^2 + b^2 + 2c = 3$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.
- 5p a) Arătați că $0 \circ 1 = 1$.
- 5p b) Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ x = 0$.
- 5p c) Demonstrați că $x \circ \sqrt{1-x^2} = 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x \ln x - 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x + \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $e^x + x \ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 2} dx = \frac{17}{6}$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_5^2 = b_4 b_6 \Rightarrow 36 = 18b_4$ $b_4 = 2$	3p 2p
2.	$m^2 + m - 4 = m \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$ $m = -2$ sau $m = 2$	3p 2p
3.	$10^{2x+2} = 10^{3x} \Leftrightarrow 2x + 2 = 3x$ $x = 2$	3p 2p
4.	Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 4 = 12$ numere	2p 3p
5.	$OA = 4$, $OB = 4$, $OC = 4$ Centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ are coordonatele $x = 0$, $y = 0$	3p 2p
6.	Cum $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$ $\sin 2x = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 =$ $= -4 + 3 = -1$	3p 2p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 1$, pentru orice număr real x Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x)) \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	2p 3p
c)	$A(a) \cdot A(b) = A(c) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ab + 2a + 2b + 1 & 3a + 3b \\ -a - b & ab - 2a - 2b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 2 & 3 \\ -1 & c - 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a + b = 1$ și $c = ab + 1$ $a^2 + b^2 + 2c = a^2 + b^2 + 2ab + 2 = (a + b)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$	3p 2p
2.a)	$0 \circ 1 = 0 \cdot \sqrt{1-1} + 1 \cdot \sqrt{1-0} =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$x \circ x = 2x\sqrt{1-x^2}$, pentru orice $x \in M$ $2x\sqrt{1-x^2} = 0$, deci $x = -1$, $x = 0$ sau $x = 1$, care convin	2p 3p
c)	$x \circ \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-(1-x^2)} + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{x^2} + 1 - x^2 = x x + 1 - x^2$, pentru orice $x \in M$ Cum $ x = x$ pentru orice $x \in [0, 1]$, obținem $x \circ \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)' + x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1' =$ $= e^x + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = e^x + \ln x + 1, \quad x \in (0, +\infty)$	2p
		3p
b)	$f(1) = e - 1, \quad f'(1) = e + 1$ Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = (e + 1)x - 2$	2p
		3p
c)	$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow \ln x \geq \ln \frac{1}{2}, \text{ deci } f'(x) = e^x + \ln x + 1 \geq e^x + \ln \frac{e}{2} > e^x > 0, \text{ de unde obținem că}$ $f \text{ este crescătoare pe } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ Pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $e^x + x \ln x - 1 \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - 1$, de unde $\text{obținem } e^x + x \ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}, \text{ pentru orice } x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$	3p
		2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 2} dx = \int_0^1 (x^2 + 2 + x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$	3p
		2p
b)	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}, \text{ unde } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o primitivă a funcției } f$ $x^2 + x + 2 > 0$, pentru orice număr real x, deci $F'(x) > 0$, pentru orice număr real x, de unde obținem că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	3p
		2p
c)	$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x' \sqrt{x^2 + 2} dx = x \sqrt{x^2 + 2} \Big _0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \sqrt{3} - \int_0^1 \left(\sqrt{x^2 + 2} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx,$ $\text{deci } \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 2} \right) \right) \Big _0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \text{ de unde obținem } a = 1, \text{ care convine}$	3p
		2p