

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{5}(1+2\sqrt{5})-\sqrt{5}=10$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Arătați că $f(1) = f(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 - 21) = \log_5 4$.
- 5p 4. După o scumpire cu 10%, un obiect costă 220 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,8)$ și $B(0,4)$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB , determinați coordonatele punctului M .
- 5p 6. În triunghiul ABC , $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60^\circ$. Calculați cosinusul unghiului A .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 2$.
- 5p b) Arătați că $B \cdot A + B = O_2$.
- 5p c) Determinați numerele naturale n pentru care $\det(B + nA) = \det B + n \det A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + 2y + 1$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ (-1) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ \left(-\frac{1}{2}\right) = x$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Arătați că legea de compoziție „ \circ ” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(x) + \ln(x^2 + 1) < \frac{5}{2}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+1) f(x) dx = e^2 - 1$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1 - \ln 2$.
- 5p c) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 e^x \ln(x+1) dx = e \ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{5}(1+2\sqrt{5})-\sqrt{5}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}==2\cdot 5=10$	3p 2p
2.	$f(1)=1^2-3\cdot 1+1=-1$ $f(2)=2^2-3\cdot 2+1=-1$, deci $f(1)=f(2)$	2p 3p
3.	$x^2-21=4\Rightarrow x^2-25=0$ $x=-5$ sau $x=5$, care convin	3p 2p
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=220$, unde x este prețul inițial al obiectului $x=200$ de lei	3p 2p
5.	$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=2$ $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=6$	3p 2p
6.	$m(\sphericalangle A)=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$ $\cos A=\frac{1}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=1\cdot(-4)-(-1)\cdot 6==-4+6=2$	3p 2p
b)	$B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B\cdot A=-B$, deci $B\cdot A+B=O_2$	3p 2p
c)	$B+nA=\begin{pmatrix} 1+n & 2+6n \\ 2-n & 4-4n \end{pmatrix}\Rightarrow \det(B+nA)=\begin{vmatrix} 1+n & 2+6n \\ 2-n & 4-4n \end{vmatrix}=2n^2-10n$, pentru orice număr natural n Cum $\det B=0$, obținem $2n^2-10n=2n$, deci $n=0$ sau $n=6$, care convin	2p 3p
2.a)	$1\circ(-1)=1+2(-1)+1==1-2+1=0$	3p 2p
b)	$x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1==x+(-1)+1=x$, pentru orice număr real x	3p 2p

c)	Presupunem că legea de compoziție „ \circ ” admite elementul neutru $e \Rightarrow 0 \circ e = e \circ 0 = 0$	3p
	$0 \circ e = 0 \Leftrightarrow 2e + 1 = 0 \Leftrightarrow e = -\frac{1}{2}$, $e \circ 0 = 0 \Leftrightarrow e + 1 = 0 \Leftrightarrow e = -1$, contradicție, deci legea de compoziție „ \circ ” nu admite element neutru	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2} =$	3p
	$= \frac{2x(x^2 + 1 - x^2 - 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 1$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	Dacă $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \ln(x^2 + 1)$, atunci $g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^3}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$,	3p
	pentru orice $x \in [0, 1]$, deci g este crescătoare pe $[0, 1] \Rightarrow g(x) \leq g(1)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ Cum $g(1) = \frac{3}{2} + \ln 2 < \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$, obținem $g(x) < \frac{5}{2}$, deci $f(x) + \ln(x^2 + 1) < \frac{5}{2}$, pentru orice $x \in [0, 1]$	2p
2.a)	$\int_0^2 (x+1) f(x) dx = \int_0^2 (x+1) \cdot \frac{e^x}{x+1} dx = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big _0^2 =$	3p
	$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$	2p
b)	$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) \Big _0^1 = \ln \frac{e^x}{x+1} \Big _0^1 =$	3p
	$= \ln \frac{e}{2} = 1 - \ln 2$	2p
c)	$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx + \int_0^1 e^x \ln(x+1) dx = \int_0^1 e^x (\ln(x+1))' dx + \int_0^1 e^x \ln(x+1) dx =$	3p
	$= e^x \ln(x+1) \Big _0^1 - \int_0^1 e^x \ln(x+1) dx + \int_0^1 e^x \ln(x+1) dx = e \ln 2$	2p