

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ este natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Arătați că $(f \circ f)(1) = f(2) + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2} = 3 \cdot 3^x$.
- 5p 4. Determinați numărul natural nenul n , știind că mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, 0)$, $N(7, 0)$ și $A(a, 3)$, unde a este număr real. Știind că $AM = AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.
- 5p 6. Se consideră $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x - 2 = 2\cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 2a-5 & a-2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + (2-a)y + az = 1 \\ ax + y + z = 2-a \\ ax + (2a-5)y + (a-2)z = -4 \end{cases}$,

unde a este număr real.

- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2(2^x + 2^y)$.
- 5p a) Arătați că $0 * 0 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $m \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x \cdot \frac{1}{f(x)} dx = \frac{31}{3}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$, unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_{-1}^1 x^{2n-1} f(x) dx$. Demonstrați că
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a = 16 + 24i + 9i^2 + 9 - 24i + 16i^2 =$ $= 16 - 9 + 9 - 16 = 0$, care este număr natural	2p 3p
2.	$\Delta = 121 - 4m$ $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{121}{4}\right]$, deci cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 30	2p 3p
3.	$1 + \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = 3 \Rightarrow (\log_7 x - 1)^2 = 0$ $\log_7 x = 1$, deci $x = 7$, care convine	3p 2p
4.	$C_n^2 = 45$, unde n este numărul de elemente al mulțimii, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ $\frac{n(n-1)}{2} = 45$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 10$	3p 2p
5.	Distanța de la punctul A la dreapta BC este egală cu 6 $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot d(A, BC)}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$	3p 2p
6.	$\cos x \cos x - \sin x \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x = \frac{\pi}{6}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 - a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 - b \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+a & b^2 - b + 2ab + a^2 - a \\ 0 & 1 & 2b+2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & a+b & (a+b)^2 - (a+b) \\ 0 & 1 & 2(a+b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(3)A(-3) = A(0) = I_3$, deci inversa matricei $A(3)$ este matricea $A(-3)$ $X = A(-3) \cdot A(5) \Leftrightarrow X = A(2)$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p 3p

2.a)	$x * y = 2xy - 3x - 3y + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 2\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} =$	3p
	$= 2\left(x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 14 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	2p
	$x - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$ sau $x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, deci $x = -1$ sau $x = 4$	3p
c)	$4\left(2^n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(2^{n+1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(2^{n+2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 2^{20} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{2+n+n+1+n+2} = 2^{20}$	3p
	$3n + 5 = 20$, deci $n = 5$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{x^3} =$	3p
	$= \frac{-2x^3 + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2}{x^3(x-1)^3} = \frac{-2(3x^2 - 3x + 1)}{x^3(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	Panta dreptei care este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$ este $f'(2) = -\frac{7}{4}$	3p
	Ecuția dreptei este $y - 3 = f'(2)(x - 0)$, deci $y = -\frac{7}{4}x + 3$	2p
c)	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} =$	3p
	$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{-n^2} \right)^{-1} = e^{-1}$	2p
2.a)	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} \Big _0^{\sqrt{3}} =$	3p
	$= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$	2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \left(x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \int_0^1 x (\sqrt{x^2+1})' dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$	3p
	$= x\sqrt{x^2+1} \Big _0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big _0^1$, deci $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$	2p
c)	Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x e^{f^2(t)} dt - x$ este derivabilă și $g'(x) = e^{x^2+1} - 1$	2p
	$g'(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci funcția g este strict crescătoare pe \mathbb{R} și, cum $g(0) = 0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)} dt = x$	3p