

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $6\sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{27}) = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(20x - 6) = \log_5 14$.
- 5p 4. După o scumpire cu 10%, un obiect costă 440 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(0, 6)$ și $C(6, 0)$. Calculați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC .
- 5p 6. Arătați că $\frac{\cos 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a-2 & a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det M = 21$.
- 5p b) Demonstrați că $A(-a) + A(a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A(a) \cdot A(b) = M$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2(x + y) - \frac{xy}{2}$.
- 5p a) Arătați că $2 \circ (-2) = 2$.
- 5p b) Determinați numărul natural nenul n pentru care $n \circ \frac{1}{n} = \frac{9}{2}$.
- 5p c) Determinați numărul real y astfel încât $x \circ y = 8$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{(x^2 + 4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor funcției f .
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 x(x+1) \left(f(x) + \frac{1}{x+2} \right) dx = 2$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 x f(x) dx = \ln \frac{9}{8}$.
- 5p c) Determinați numărul natural p , știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\ln \left(p^2 + \frac{1}{3} \right)$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$6\sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{27}) = 6\sqrt{3} + 2(1 - 3\sqrt{3}) =$ $= 6\sqrt{3} + 2 - 6\sqrt{3} = 2$	3p 2p
2.	$f(2) = 0$ $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = 0$	3p 2p
3.	$20x - 6 = 14$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	$x + \frac{10}{100} \cdot x = 440$, unde x este prețul inițial al obiectului $x = 400$ de lei	3p 2p
5.	Mijlocul segmentului BC este punctul $M(3,3)$ $AM = 1$	2p 3p
6.	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\cos 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det M = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-9) - (-6) \cdot 2 =$ $= 9 + 12 = 21$	3p 2p
b)	$A(-a) + A(a) = \begin{pmatrix} -a+1 & -a+2 \\ -a-2 & -a+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a-2 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a-2 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ b-2 & b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2ab-a+3b-3 & 2ab+3a+3b+4 \\ 2ab-a-b-4 & 2ab-b+3a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$ Obținem $a = -1$, $b = 1$	2p 3p
2.a)	$2 \circ (-2) = 2(2 + (-2)) - \frac{2 \cdot (-2)}{2} =$ $= \frac{4}{2} = 2$	3p 2p

b)	$2\left(n + \frac{1}{n}\right) - \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} = \frac{5}{2}$ Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$	3p 2p
c)	$2(x + y) - \frac{xy}{2} = 8 \Leftrightarrow 4x + 4y - xy - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(4 - y) = 0$, pentru orice număr real x $y = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} =$ $= \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-2, 2] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2, 2]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2, +\infty)$ f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f(2) = \frac{1}{4}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 x(x+1) \left(f(x) + \frac{1}{x+2} \right) dx = \int_0^2 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^2 = 2$	2p 3p
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} - 1 + \frac{2}{x+2} \right) dx =$ $= \left(-\ln(x+1) + 2\ln(x+2) \right) \Big _0^1 = 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln \frac{9}{8}$	2p 3p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left(\ln(x+1) - \ln(x+2) \right) \Big _0^1 = \ln \frac{4}{3}$ $\ln\left(p^2 + \frac{1}{3}\right) = \ln \frac{4}{3} \Leftrightarrow p^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow p^2 - 1 = 0$ și, cum p este număr natural, obținem $p = 1$	3p 2p