

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați partea reală a numărului complex $z = 3 + 2(1 - i)$.
- 5p** 2. Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 10 = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
- 5p** 5. Determinați numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y = (a - 1)x + 1$ și $y = 2x - 3$ sunt paralele.
- 5p** 6. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(A(2))$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4(x + y - 3) - xy$.
- 5p** a) Calculați $2 * 4$.
- 5p** b) Arătați că $x * y = 4 - (x - 4)(y - 4)$ pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $f'(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 8x + 15}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^{2014} (x + 3)(x + 5) f(x) dx = 2014$.
- 5p** b) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{144}$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 0$ știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = a$, are aria egală cu $\frac{1}{2} \ln \frac{10}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c) – 2 iulie 2014

Matematică *M_{st-nat}*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = 3 + 2 - 2i =$ $= 5 - 2i$, deci partea reală a numărului z este egală cu 5	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 3$, $x_1 x_2 = 10$ $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = 3 + 2 \cdot 10 = 23$	3p 2p
3.	$x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0$ $x_1 = -1$ și $x_2 = 0$ care verifică ecuația	3p 2p
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 2 moduri Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar cifra sutelor poate fi aleasă într-un singur mod Se pot forma $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ numere	2p 2p 1p
5.	$a - 1 = 2$ $a = 3$	3p 2p
6.	$A = \frac{\pi}{2}$ $R = \frac{5}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 =$ $= 3$	3p 2p
b)	$A(x) \cdot A(-x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 + 1 & 0 \\ 0 & -x^2 + 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -x^2 + 1 & 0 \\ 0 & -x^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$	3p 2p
c)	$A(1) + A(2) + \dots + A(n) = \begin{pmatrix} 1+2+\dots+n & n \\ n & 1+2+\dots+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \cdot n = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n	2p 3p
2.a)	$2 * 4 = 4(2 + 4 - 3) - 2 \cdot 4 =$ $= 12 - 8 = 4$	3p 2p

b)	$x * y = 4x + 4y - 12 - xy = 4 - xy + 4x + 4y - 16 =$ $= 4 - x(y - 4) + 4(y - 4) = 4 - (x - 4)(y - 4)$ pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$x * x = 4 - (x - 4)^2 \Rightarrow x * x * x = 4 + (x - 4)^3$ $(x - 4)^3 = x - 4 \Rightarrow x = 3$ sau $x = 4$ sau $x = 5$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (x \ln x - x + 1) =$ $= e \ln e - e + 1 = 1$	2p 3p
b)	$f'(x) = (x \ln x - x + 1)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 =$ $= \ln x + 1 - 1 = \ln x, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
c)	$f'(1) = 0, f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^{2014} (x+3)(x+5)f(x)dx = \int_0^{2014} 1dx =$ $= x \Big _0^{2014} = 2014$	2p 3p
b)	$\int_{-1}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big _{-1}^1 = \frac{1}{2} (f^2(1) - f^2(-1)) =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{576} - \frac{1}{64} \right) = -\frac{1}{144}$	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{1}{(x+4)^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x+3}{x+5} \Big _0^a = \frac{1}{2} \ln \frac{5(a+3)}{3(a+5)}$ $\frac{5(a+3)}{3(a+5)} = \frac{10}{9} \Rightarrow a = 1$	3p 2p