

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Test 20**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) : 15 = 1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 5$ . Arătați că  $f(x) - f(-x) = 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{4x-3} = \sqrt{2x+1}$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $x$  din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , acesta să fie soluție a ecuației  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,3)$  și  $B(3,0)$ . Determinați ecuația dreptei care trece prin  $O(0,0)$  și este paralelă cu dreapta  $AB$ .
- 5p** 6. Calculați aria rombului  $ABCD$ , știind că  $AC = 6$  și  $BD = 4$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = A - xI_2$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(B(0)) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $A \cdot A + I_2 = O_2$ , unde  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\det(B(x)) \geq 1$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y + 4$ .
- 5p** a) Arătați că  $2020 * (-1) = 3$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x * y = (x+1)(y+1) + 3$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere întregi pentru care  $m * n = 2$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 3$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 8x(x-1)(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $-5 \leq f(x) \leq -3$ , pentru orice  $x \in [-1, 1]$ .
2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^4 (f(x) + \sqrt{x}) dx = 21$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2020$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** c) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) + \sqrt{x}) e^x dx = e(2e - 1)$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_tehnologic***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 20

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) : 15 = \frac{4-1}{2} \cdot \frac{9-1}{3} \cdot \frac{16-1}{4} : 15 =$ $= 15 : 15 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) - f(-x) = x^2 + 5 - ((-x)^2 + 5) =$ $= x^2 + 5 - x^2 - 5 = 0$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
3.	$4x - 3 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 4$ $x = 2$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$ sunt 1 și 2, care aparțin mulțimii $A$ , deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = \frac{0-3}{3-0} = -1$ Ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta $AB$ este $y = -x$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} =$ $= 12$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$B(0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(0)) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 5 =$ $= -9 + 10 = 1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A \cdot A + I_2 = \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p 2p
c)	$B(x) = A - xI_2 = \begin{pmatrix} 3-x & -2 \\ 5 & -3-x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x)) = \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 5 & -3-x \end{vmatrix} = -9 + x^2 + 10 =$ $= x^2 + 1 \geq 1$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
2.a)	$2020 * (-1) = 2020 \cdot (-1) + 2020 + (-1) + 4 =$ $= -1 + 4 = 3$	3p 2p
b)	$x * y = xy + x + y + 1 + 3 =$ $= x(y+1) + (y+1) + 3 = (x+1)(y+1) + 3$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

c)	$(m+1)(n+1)+3=2$	2p
	$(m+1)(n+1)=-1$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere întregi, obținem $(-2,0)$ și $(0,-2)$	3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 8x^3 - 8x =$	3p
	$= 8x(x^2 - 1) = 8x(x-1)(x+1), x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(1) = -5, f'(1) = 0$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ , adică $y = -5$	3p
c)	$f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0, x \in [-1,0] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[-1,0]$ și $x \in [0,1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[0,1]$	3p
	Cum $f(-1) = f(1) = -5$ și $f(0) = -3 \Rightarrow -5 \leq f(x) \leq -3$ , pentru orice $x \in [-1,1]$	2p
2.a)	$\int_1^4 (f(x) + \sqrt{x}) dx = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^4 =$	3p
	$= \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$	2p
b)	$F'(x) = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2020 \right)' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} =$	3p
	$= x^2 - \sqrt{x} = f(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci $F$ este o primitivă a funcției $f$	2p
c)	$\int_1^2 (f(x) + \sqrt{x}) e^x dx = \int_1^2 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big _1^2 - \int_1^2 2x e^x dx = 4e^2 - e - 2 \left( x e^x \Big _1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) =$	3p
	$= 4e^2 - e - 2(2e^2 - e) + 2e^x \Big _1^2 = 2e^2 - e = e(2e - 1)$	2p