

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z = (a + 2i)^2 + (a - 2i)^2$ este real, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$. Arătați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{\frac{x+1}{2}} = 2 \cdot 2^x$.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict crescătoare.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax + y - 5 = 0$, unde a este număr real și $x - 4y + 3 = 0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ x + y = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p b) Arătați că matricea $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A .
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1 \circ z_2 = iz_1 z_2 + z_1 + z_2$.
- 5p a) Arătați că $i \circ i = i$.
- 5p b) Demonstrați că $z_1 \circ z_2 = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .
- 5p c) Demonstrați că simetricul numărului $\frac{1}{2}(1 + i)$ în raport cu legea de compoziție „ \circ ” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n - n \ln x + 1$, unde n este număr natural nenul.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{n(x^n - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = 0$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0, 1]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) dx = 12$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x} dx$.

5p c) Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)dx - 14\int_0^1 f^6(x)dx = 128$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = a^2 + 4ai - 4 + a^2 - 4ai - 4 =$ $= 2a^2 - 8 \in \mathbb{R}$	3p 2p
2.	$f(x) - 1 = -\frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = -\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = -\frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$ Cum $\frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$, pentru orice număr real x , obținem $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x	3p 2p
3.	$\sqrt{3}^{x+1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1} = 1$ $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$	3p 2p
4.	Numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict crescătoare este egal cu $C_4^3 =$ $= \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$	3p 2p
5.	Dreapta de ecuație $ax + y - 5 = 0$ are panta egală cu $-a$ Dreapta de ecuație $x - 4y + 3 = 0$ are panta egală cu $\frac{1}{4}$, deci $a = -\frac{1}{4}$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2 = 0$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -2$	2p 3p
b)	$A \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ $B \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$, deci B este inversa matricei A	3p 2p

c)	$\det A \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$ $2 \cdot \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow 2a+2=2 \Leftrightarrow a=0$	3p 2p
2.a)	$i \circ i = i \cdot i \cdot i + i + i = -i + 2i = i$	3p 2p
b)	$z_1 \circ z_2 = iz_1 z_2 + z_1 + z_2 - i + i = iz_1(z_2 - i) + (z_2 - i) + i =$ $= (z_2 - i)(iz_1 + 1) + i = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2	3p 2p
c)	$z \circ 0 = z$, $0 \circ z = z$, pentru orice număr complex z , deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ” $z \circ z' = 0 \Leftrightarrow i(z-i)(z'-i) + i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z'-i) = -1$, deci $z' = -\frac{1}{z-i} + i$ și, cum $z = \frac{1}{2}(1+i)$, obținem $z' = -\frac{2}{1+i-2i} + i = \frac{-1+i}{1-i} = -1$, care este număr real	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = nx^{n-1} - n \cdot \frac{1}{x} = n\left(x^{n-1} - \frac{1}{x}\right) =$ $= n \cdot \frac{x^n - 1}{x} = \frac{n(x^n - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n - n \ln x + 1 - x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n \ln x + 1}{x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p
c)	Pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0, 1] \Leftrightarrow a \in [2, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) e^{x^3+3x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1) e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 + 3x)' e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+3x} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} (e^4 - e^0) = \frac{e^4 - 1}{3}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 f^7(x) dx = \int_0^1 x'(x^2 + 1)^7 dx = x(x^2 + 1)^7 \Big _0^1 - \int_0^1 14x^2 (x^2 + 1)^6 dx = 2^7 - 14 \int_0^1 (x^2 + 1 - 1)(x^2 + 1)^6 dx =$ $= 128 - 14 \int_0^1 (x^2 + 1)^7 dx + 14 \int_0^1 (x^2 + 1)^6 dx$, deci $15 \int_0^1 f^7(x) dx - 14 \int_0^1 f^6(x) dx = 128$	3p 2p