

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $A = z(2 + 3i) + \bar{z}(2 - 3i)$ este real, pentru orice număr complex z , unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p 2. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 7$. Arătați că $f(\sqrt{2}) \cdot f(1 + \sqrt{2}) \cdot f(2 + \sqrt{2}) \cdot \dots \cdot f(10 + \sqrt{2}) = 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + x - 2) = 1 + \lg \frac{x-1}{2}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie mai mare decât 51.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 6)$, $B(-3, -1)$ și $C(-2, -2)$. Arătați că punctul $M(1, 2)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p 6. Se consideră R , raza cercului circumscris triunghiului ABC și r , raza cercului înscris în triunghiul ABC . Știind că $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{rR}$, arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + mz = 4 \\ 4x + y + mz = 6 \\ x - my - z = -1 \end{cases}$, unde m

este număr real.

- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0} = x_0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $2 * (-2) = 0$.
- 5p b) Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$. Arătați că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$.
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f(x) dx = \frac{\pi}{8}$.
- 5p** b) Pentru fiecare număr natural n , considerăm numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 0$, pentru care $\int_0^a x f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Cum $2 - 3i = \overline{2 + 3i}$, $A = z(2 + 3i) + \bar{z} \cdot \overline{2 + 3i} =$ $= z(2 + 3i) + \bar{z}(2 + 3i) \in \mathbb{R}$, deoarece este suma dintre un număr complex și conjugatul său	2p 3p
2.	$f(3 + \sqrt{2}) = (3 + \sqrt{2})^2 - 6(3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 9 + 2 - 18 + 7 =$ $= 0$, deci $f(\sqrt{2}) \cdot f(1 + \sqrt{2}) \cdot f(2 + \sqrt{2}) \cdot \dots \cdot f(10 + \sqrt{2}) = 0$	3p 2p
3.	$\lg(x^2 + x - 2) = \lg\left(10 \cdot \frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 5x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$, care nu convine, sau $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt 69, 96, 78, 87, 79, 97, 88, 89, 98 și 99, deci sunt 10 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$	2p 2p 1p
5.	$AM = 5$, $BM = 5$, $CM = 5$ $AM = BM = CM$, deci punctul M este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \frac{BC}{2R} + \frac{AC}{2R} + \frac{AB}{2R} \Rightarrow \frac{AB + AC + BC}{2R} = \frac{1}{rR}$ $p = \frac{1}{r}$ și, cum $r = \frac{S}{p}$, obținem $S = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -2 + 0 + 0 - 0 - (-4) - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\det(A(m)) = 2(1-m)(1+m)$, pentru orice număr real m Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	3p 2p
c)	$m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(1, \frac{2}{m+1}, \frac{2}{m+1}\right)$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $\frac{y_0}{z_0} = \frac{2}{\frac{m+1}{2}} = 1 = x_0$, pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	3p 2p

2.a)	$2 * (-2) = 2 \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1} + (-2) \cdot \sqrt{2^2 + 1} =$ $= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 0$	3p 2p
b)	$x * 0 = x\sqrt{0^2 + 1} + 0 \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x\sqrt{1} = x$, pentru orice număr real x $0 * x = 0 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{0^2 + 1} = x\sqrt{1} = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$f(x) * f(y) = f(x)\sqrt{f^2(y)+1} + f(y)\sqrt{f^2(x)+1} = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \sqrt{\left(\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\right)^2 + 1} + \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \sqrt{\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^2 + 1} =$ $= \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \sqrt{\left(\frac{e^{2y}+1}{2e^y}\right)^2} + \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)^2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y}+1}{2e^y} + \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \cdot \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{e^{2(x+y)}-1}{2e^{x+y}} = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{x^2+1} - e^x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$ $= \frac{e^x(x^2+1) - xe^x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)$ Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 2$	2p 3p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f$ este strict crescătoare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci $\text{Im } f = (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \Big _0^2 =$ $= \frac{1}{2} \arctg 1 - \frac{1}{2} \arctg 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$	3p 2p
b)	$0 < \frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{4}$, deci $0 < \left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n \leq \frac{1}{4^n}$, pentru orice $x \in [0,1]$ și orice număr natural n , deci $0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4^n} dx$, de unde obținem $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, pentru orice număr natural n Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p 2p
c)	$\int_0^a x f(x) dx = \int_0^a \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \Big _0^a = \frac{1}{2} \ln(a^2+4) - \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2+4}{4}$ $\frac{1}{2} \ln \frac{a^2+4}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} \Leftrightarrow a^2+4=5$ și, cum $a > 0$, obținem $a = 1$	3p 2p