

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și rația $q = \sqrt{5}$. Calculați partea întreagă a lui b_4 .
- 5p 2. Se consideră funcția bijectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și f^{-1} .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x^2 + x + 1) - \log_2(x^2 - x + 2) = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - 2\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.
- 5p 6. Arătați că, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x$, atunci $x = \frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 2x + (m+1)y + z = 2 \\ x + y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru $m = -3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real m , sistemul de ecuații are cel mult o soluție.
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\bar{z}_1 - \frac{1}{2}\bar{z}_2$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p a) Arătați că $(1+i) \circ (1-i) = 1$.
- 5p b) Se consideră $H = \{2 + bi \mid b \in \mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Se consideră numărul complex z_0 . Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$, $x \in (1, +\infty)$.

- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^4 e^x f(x) dx = 27$.
- 5p** b) Calculați $\int_1^e f(\ln x) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_4 = b_1 q^3 = 2 \cdot \sqrt{5}^3 = 10\sqrt{5} = \sqrt{500}$ $484 < 500 < 529 \Rightarrow 22 < \sqrt{500} < 23$, deci partea întreagă a lui b_4 este egală cu 22	2p 3p
2.	$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow 2f(x) - 3 = x \Leftrightarrow 2(2x - 3) - 3 = x$ $x = 3$	3p 2p
3.	$\log_2 \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = 2 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor un număr divizibil cu 11 sunt 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 și 92, deci sunt 8 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (1+a)\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} ^2 = (1+a)^2 + 1$ Cum $ \vec{u} ^2 = 2$ și $ \vec{v} ^2 = a^2 + 4$, obținem $a^2 + 2a + 2 = 2 + a^2 + 4$, deci $a = 2$	2p 3p
6.	$(\sin x + \cos x)^2 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x$ $\text{tg } 2x = 1$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $2x = \frac{\pi}{4}$, deci $x = \frac{\pi}{8}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 2 + 1 - 1 - 0 - 2 = 0$	2p 3p
b)	Dacă $m = -3$ și (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ 2x_0 - 2y_0 + z_0 = 2 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 = -2 \end{cases}$ Prin adunarea celor trei relații, obținem $0 = 1$, ceea ce este imposibil, deci, pentru $m = -3$, sistemul de ecuații nu are soluții	2p 3p
c)	$\det(A(m)) = m^3 + 2m^2 - 3m = m(m-1)(m+3)$, pentru orice număr real m Dacă $m = 0$, atunci $\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2, \text{ care nu are soluții,} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ dacă $m = 1$, atunci $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2, \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ care nu are soluții	1p 2p

	$m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\} \Rightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică și, cum pentru $m = -3$, sistemul nu are soluții, obținem că sistemul de ecuații are cel mult o soluție	2p
2.a)	$(1+i) \circ (1-i) = 1+i+1-i - \frac{1}{2}(1-i) - \frac{1}{2}(1+i) =$ $= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 1$	3p 2p
b)	$z_1, z_2 \in H \Rightarrow z_1 = 2+bi$ și $z_2 = 2+ci$, $b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 \circ z_2 = 2+bi+2+ci - \frac{1}{2}(2-bi) - \frac{1}{2}(2-ci) =$ $= 4+bi+ci-1+\frac{1}{2}bi-1+\frac{1}{2}ci = 2+\frac{3}{2}(b+c)i \in H$, deci H este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu legea de compoziție „ \circ ”	3p 2p
c)	Dacă $z_0 = a+ib$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, pentru $z = x-ib$, unde x este număr real oarecare, obținem $z_0 \circ z = a+ib+x-ib - \frac{1}{2}(a-ib) - \frac{1}{2}(x+ib) =$ $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x \in \mathbb{R}$, deci există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left((x^3 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (x^3 - 3x + 2)^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 3) =$ $= \frac{1}{3} \frac{3(x^2 - 1)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}, x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}} =$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} = +\infty$	3p 2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci injectivă $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci pentru orice $a \in (0, +\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică	2p 3p
2.a)	$\int_1^4 e^x f(x) dx = \int_1^4 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big _1^4 =$ $= \frac{4^3}{3} + 8 - \frac{1}{3} - 2 = 21 + 6 = 27$	3p 2p
b)	$\int_1^e f(\ln x) dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x + 2}{e^{\ln x}} dx = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln^2 x + 2) dx = \left(\frac{1}{3} \ln^3 x + 2 \ln x \right) \Big _1^e =$ $= \frac{1}{3} \ln^3 e + 2 \ln e - \frac{1}{3} \ln^3 1 - 2 \ln 1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$	3p 2p
c)	Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2}{e^x} = 2$	2p 3p